木構造グラフにおける
施設配置問題アルゴリズム

毛　利　進太郎[1]
Ya-fen Tseng[2]
石　井　博　昭[3]

概　要

本論文は建物での施設配置問題を扱っている。従来，筆者らは AED の配置問題として，建物群への施設配置問題を研究してきた。そこでは建物群への AED の割り当てと，建物内での配置を扱う問題を考えその近似解法を提案した。しかしながら先の結果では単純な構造の建物への割り当てしか考慮できず，より構造を一般化したモデルを検討する必要があった。そこで本論文ではより複雑な構造の建物の構造をグラフとして表し，そこで施設を適切に配置するための方法について検討する。

1　はじめに

従来より筆者らは建物群への AED の配置問題として，任意の場所への距離を最小にする施設の配置問題を研究してきた[1]。そこで施設の割り当てを検討し，建物へ配置する近似アルゴリズムを提案している。ただしこれまで検討してきた建物は比較的単純な構造であり，より現実的なモデルを検討する必要があった。本論文では複雑な構造の建物における配置を考えるためにグラフに

1　神戸学院大学経済学部
2　Chung Hwa University of Medical Technology
3　大阪大学名誉教授

よるモデル化を考え，そのうえでグラフを分割するアルゴリズムを提案する。

またこの問題を考えるために筆者らは[1]において近似アルゴリズムを提案している。それは，議席配分問題[2]のアルゴリズムを適用した割り当て決定の部分 $\boldsymbol{ALOC}(X, \boldsymbol{B})$ と，それぞれの建物の設置場所を決定するためのアルゴリズム $\boldsymbol{loc}(B_i, n_i)$ からなる。そこでは単純な形状の建物のみを検討しているが，建物の形状に応じた最適配置を決定するアルゴリズムがあればどのような建物であっても解を求めることができる。そこで本論文では建物の床の構造が各階で異なる場合の最適配置のアルゴリズムを提案する。障害物がある場所での配置問題について ISHII 等が[3]において既に研究しており，障害物を考慮したうえでの直角距離を考えている。この定義を応用し各階の形状の違いを評価するとする。各階のいずれかの位置においても AED の需要が発生する可能性があるものと考え，AED からそこまでの距離を最小とする配置を考える。

2　問題設定

本節ではこの問題の定式化を行う。

- 建物 B は f 階の床と階段からなるものとする
- 階段の1階の高さはすべて等しいものとし d_h とする。各床の最大距離を d_{w_i} とする。
- 建物 B の AED の設置数を n とする。ただし n は階数 f より小さいものとする。すなわち $1 \leq n < f$ とする。
- 各階での距離 d_{w_i} は直角距離であるとする。

目的関数

- 建物 B 内での任意の位置から AED　k までの最大距離を d_k とする。
- d を $k=1, \cdots, n$ についての d_k の最大距離とする。

この問題の目的関数は d_k を最小とする AED の設置を考えることである。

2.1　グラフ定式化

複数の階を持つ建物を考える。上下を移動できる階段は１階から最上階まで同じ場所にあり，各階の構造は異なっているものとする。

各階において機器を設置する場所を考えるために，階段を基点に障害物がある構造と考え，そこでの最大距離を d_{v_i} とする。このモデルにおいては最大距離を最小にするので，考慮すべきは距離は最大距離 d_{v_i} のみである。これよりこの建物の構造は図１のようなグラフで表現することができる。

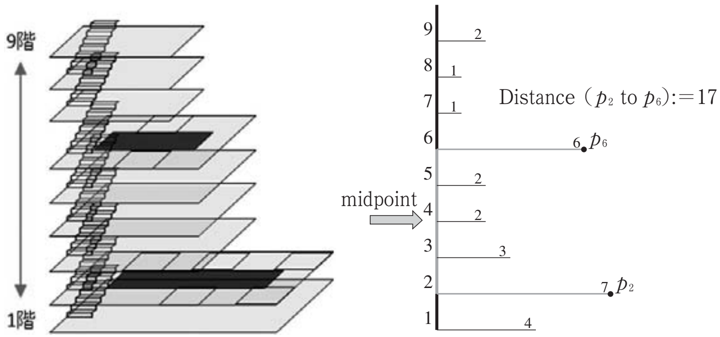


図１　$n=1$ の場合

このグラフ $\boldsymbol{G}$ は次のように定義される

- $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ は頂点集合 V と辺集合 E からなる。
- 頂点集合 V は階段から各フロアへの接続点 c_i の集合 $C=\{c_i\}$ と各フロアの端点 p_i の集合 $P=\{p_i\}$ からなる。
- 辺集合 $\boldsymbol{E}$ は c_i と c_{i-1} をつなぐ辺部分集合 $\boldsymbol{E_s}=\{(c_i, c_{i-1})\mid i=2, 3, \cdots, f\}$ と，c_i と p_i をつなぐ辺部分集合 $\boldsymbol{E_f}=\{(c_i, p_i)\mid i=1, 2, \cdots, f\}$ からなる。
- $\forall e\in\boldsymbol{E}$ には長さ $l(e)$ があり，$\forall e_s\in\boldsymbol{E_s}$ の長さ $l(e_s)$ はすべて等しく $l(e_s)=d_h$ for $\forall e_s\in\boldsymbol{E_s}$ となり，$\forall e_f\in\boldsymbol{E_f}$ の長さ $l(e_f)$ はフロアの最大距離を表し e_f が c_i と p_i を結ぶ辺とすると $l(e_f)=d_{w_i}$ となる。

ここで，AED を１つ設置することを考える。AED からの任意の位置への最

大距離を考えるときには，端点 p_i 以外の位置についてはそれよりも AED からの距離が遠い端点 p_i が必ず存在する。よってここで考慮すべきは各階の端点 p_i 間の距離であり，各階の端点 p_i 間の最大距離をもつ p_i，p_j の間の位置に AED を設置する必要がある。

例えば，図 1 において最大距離を持つ端点のペアは p_2，p_6 であり，AED は p_2 から p_6 までの中間の点に置かれるべきである。これによって建物は 2 つのブロックに分けられ，AED からそれぞれのブロックの最遠点までの距離のいずれか大きいほうが目的値となる。

次に $n>1$ の場合を考える。このとき建物をいくつかのブロックに分けそれぞれのブロックに AED を配置することを考える。ブロックに分割し，緊急事態の際には発生場所と同一のブロック内の AED を用い，ブロックをまたがないこととすると，もし p_2 から p_6 が最長であるならば，建物は p_2 から p_6 の間の 4 つの候補の辺のうち 1 つで分割すべきである。なぜならブロックをまたがないので p_2 から p_6 間の距離は考慮する必要はなく，ブロック内での最長距離，すなわち p_2 から p_6 間の距離以下の距離を 2 つに分割することを考慮すればいいからである。

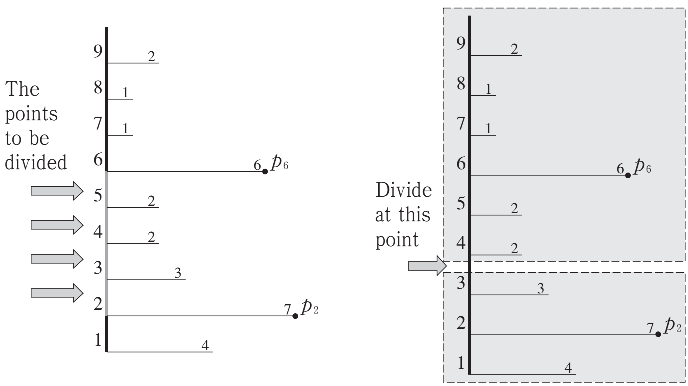


図 2　$n=2$ の場合

もし AED の数 $n=2$ の場合，それぞれの分割されたブロックへの AED の設置

場所を $n=1$ の時と同様に考慮し，どこで分割すべきか決定すればよい。

AED の数 $n>2$ の場合ブロックを分割する位置は，２つに分割されたブロックのそれぞれに再帰的に分割することを検討する。

ここでのアルゴリズム $\boldsymbol{loc}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{n})$ は以下のようになる。

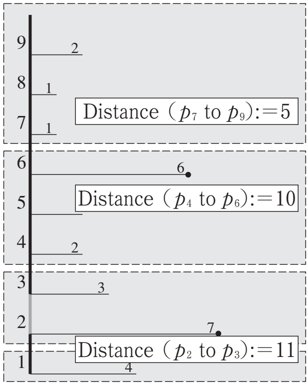


図３　$n=4$ の場合

Algorithm $\boldsymbol{loc}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{n})$

Step 1：端点 p_i と p_j の距離が最大距離であるような ペア（p_i，p_j）を決定する

Step 2：

Case 1：もし $n_i=1$ であるときは p_i と p_j の中点に AED を設置する。

Case 2：もし $n_i>1$ であるとき，ペア（p_i，p_j）の間の点集合 c_l を考える。これらの点を分割点として２つのグラフ G_A と G_B に分けることを考え，アルゴリズム $\boldsymbol{loc}(G_A,\ n-1)$，$\boldsymbol{loc}(G_B,\ n-1)$ を再帰的に適用し，最適となる分割点を採用する。

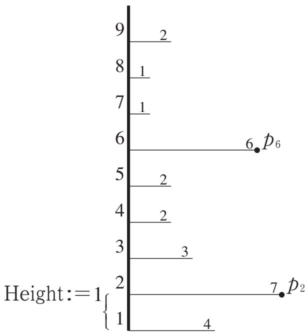
３　Distance Table

各頂点間を表にした Distance Table を考える。この表をもとに最適な分割を考えるアルゴリズムを考える。先に示した通り分割すべきである位置は複数の候補があることが考えられるが，最適な分割を考える際に Distance Table にて

評価を行うことで検討をより簡便にできる。

3.1　Distance Table を使った例

ブロック分割を考えるために距離の表を考える。各フロアの端点間の距離を表にしたものが図4である。同じ点の間の距離は不要であり，対角に対称であるので右上半分のみ考えるとこの例では最長距離が17となっている。



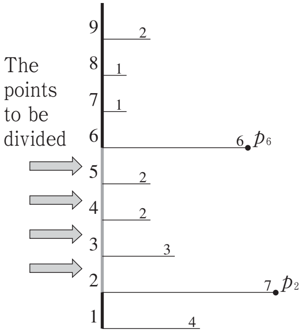
距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

図4　Distance Table

$n>1$ かつ p_2 から p_6 への距離が最長距離であり，建物を分割する候補の辺は (c_2, c_3)，(c_3, c_4)，(c_4, c_5)，(c_5, c_6) の4つである。ここで3階と4階の辺 (c_3, c_4) で建物を2つに分割したとすると図5となる。1－3階を示すグラフを G_{1-3} とし，そこにAEDを設置すると最大距離は G_{1-3} に置かれたAEDから G_{1-3} の任意の位置までが対象となる。G_{4-9} についても同様であるので，グループをまたいだ距離を考慮する必要がない。よって図5の表の(1, 4)から(3, 9)の網掛けの数値部分は分割したことで考慮する必要がなくなった部分であり，これを U とする。逆に残る部分は R とする。

辺 (c_2, c_3) (c_3, c_4)，(c_4, c_5)，(c_5, c_6) で分割した場合を挙げると図6のようになる。

これらのケースでは p_2 から p_6 への最長距離17が考慮する必要のない部分 U に含まれていることが分かる。さらに続く最長距離である p_2 から p_9，p_1 から



距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

図５　（b_3，b_4）で分割した場合

距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_2，c_3）

	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_3，c_4）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_4，c_5）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_5，c_6）

図６　４つの辺で分割したケース

p_6 なども同様に U に含まれる。どのケースにおいても R に残る最長距離は p_1 から p_2 の距離12となる。ただし（c_5，c_6）の辺で分割するケースにおいては p_2

から p_5 の距離12も R に残ることになる。

ここでは辺（c_3，c_4）で建物を２つに分割したとして，さらに分割を考える。p_1 から p_2 の距離12を U に含めるために（c_1，c_2）で建物を分割する，これにより図７で示されるように残る最長距離は11となる。

ここで２つに分割した図６のケースを再び考えると（c_2，c_3），（c_3，c_4），（c_4，c_5）では次に考えるべき分割は（c_1，c_2）で建物を分割することのみであるが，（c_5，c_6）の辺で分割するケースにおいては p_2 から p_5 の距離12も検討すべき対象として R に残っているので，（c_1，c_2）で分割しても（c_2，c_3），（c_3，c_4），（c_4，c_5）で分割してもいずれかの距離12が R に残る。つまり図６の４つのケースでは，さらに分割を考える場合は，より大きい距離が残らない（c_2，c_3），（c_3，c_4），（c_4，c_5）で分割すべきであるといえる。さらに greedy に考えると，考慮する必要がない部分 U に距離12と距離11が２か所含まれる（c_3，c_4）で分割すべきである。

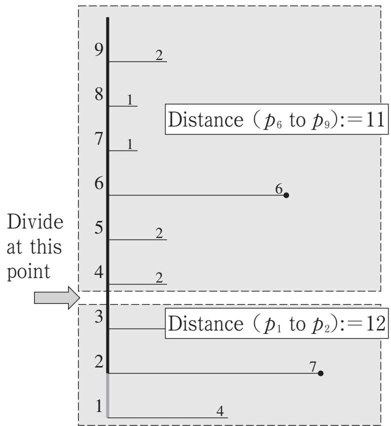
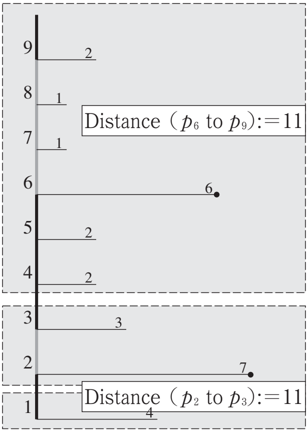


図７　２つに分割

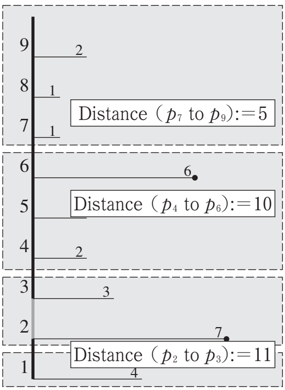
ここでそれぞれの分割されたグラフに AED を設置すると G_{1-3} では最大距離が６，G_{4-9} では最大距離が5.5となり全体では最大距離は６となる。

さらに分割することを考える。３つのブロック G_1，G_{2-3}，G_{4-9}，に分割した



距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

図８　３つに分割した場合



距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_6, c_7）

距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

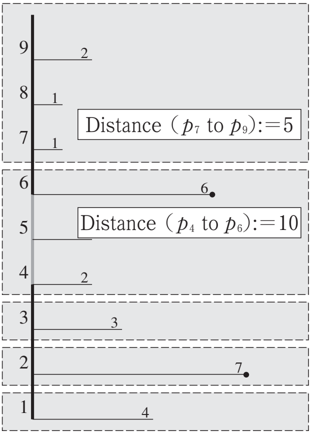
（c_7, c_8）

距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

（c_8, c_9）

図９　４つの分割

結果が図８である。G_{2-3}，G_{4-9} のそれぞれのブロックでの最長距離が11である。さらに４つのブロックに分割した結果が図９となる。



距離	4	7	3	2	2	6	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	12	9	9	10	15	11	12	14
2	12	7	11	11	12	17	13	14	16
3	9	11	3	6	7	12	8	9	11
4	9	11	6	2	5	10	6	7	9
5	10	12	7	5	2	9	5	6	8
6	15	17	12	10	9	6	8	9	11
7	11	13	8	6	5	8	1	3	5
8	12	14	9	7	6	9	3	1	4
9	14	16	11	9	8	11	5	4	2

図10　５つの分割

さらに５ブロックに分割を続ける。この場合は図10に示すように（c_2，c_3）で分割することで最大距離を10にすることができる。

これで最大距離は10となり，AED を各ブロックの最適位置に置くとそれぞれのブロックにおける最大距離は G_1 は 2，G_2 は3.5，G_3 は1.5，G_{4-6} は 5，G_{7-9} は2.5となり，最大距離は3.5ということになる。

これまでの分割の手順における評価値の変化をまとめると以下の表１になる。

表１

分割	分割辺	表中の最大距離	AED までの距離
1	—	17	8.5
2	（c_3，c_4）	12	6
3	（c_1，c_2）	11	5.5
4	（c_6，c_7）	11	5.5
5	（c_2，c_3）	10	5

3.2　Distance Table を使ったアルゴリズム

２節で示したアルゴリズム $\boldsymbol{loc}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{n})$ はグラフを分割する辺の候補を探索し，さらにその分割されたグラフそれぞれ対して分割する辺を探索するという，

木構造の再帰的な探索を行うので対象が大きくなると計算量が膨大になる。そこで3.1で示したようにより Distance Table を用いて簡便なアルゴリズム $\boldsymbol{loc^D(G, n)}$ を提案する。

Algorithm $\boldsymbol{loc^D(G, n)}$

Step 1：端点 p_i と p_j の距離を一覧表とする。ただし表は対角に対象であるので，上半分を考えるもとし，その距離を非減少順に並べる。これを d_1，d_2，…，$d_{f(f-1)}$ とする。

Step 2：次を n 回繰り返す。

Case 1： もし $n=1$ であるときは p_i と p_j の中点に AED を設置する。

Case 2： もし $n>1$ であるとき，ペア（p_i，p_j）の間の辺集合 $c_l \in$ を考える。これらの辺を分割点辺して2つのグラフ G_A と G_B に分ける，ただし分割を考えるうえで距離のリスト d_1，d_2，…，$d_{f(f-1)}$ より，最長距離である d_1 が考慮する必要がなくなる対象 U となり，残り d_2，…，$d_{f(f-1)}$ からできる限り大きい距離が対象 U に含まれるようになる分割を選択する。候補が複数ある場合はその次に小さい距離を含むを検討し辞書式に選択する。この分割グラフ G_A と G_B ののち $\boldsymbol{loc^D}(G_A, n-1)$，$\boldsymbol{loc^D}(G_B, n-1)$ を再帰的に適用し，最適となる分割点を採用する。

これにより，分割する候補の辺で分かれていた探索が，一意に決まり探索を大きく減らすことができる。

4　おわりに

本論文では AED の設置問題における建物内の配置問題において，グラフによる定式化とその下でのより簡易なアルゴリズムの提案を行った。ただしこのアルゴリズムはよりまだ比較的単純な建物を対象としており，複雑な形状の建物での配置問題に拡張することが必要であろうと考えられる。

Reference

[1] TSENG Y, MOHRI S, ISHII, H., (2018) Location of Automated External Defibrillators, International Journal of Japan Association for Management Systems, Vol. 10, No. 1, 81-85

[2] Ichimori, T. (2013) On the proportionality of the relaxed divisor method and the relationship between the five historical methods and the relaxed divisor methods, Transaction of the Operations Research Society of Japan, Vol. 56, 1-14 (in Japanese)

[3] ISHII, H, SASAKI, Y., (2016) Optimal facility location problemunder stochastic construction cost and barriers, International Journal of Japan Association for Management Systems, Vol. 8, No. 1, 35-38