

相対価格変動の単調性の条件

佐藤伸明

要旨

分配の変化によって誘発される相対価格の変化について明確なことは言えないという Sraffa 型システムの伝統的教義に反して、投入係数行列の対角化に基づいて相対価格変動の単調性を主張する Bidard and Steedman の所論を批判的に検討する。それを通じて、相対価格変動の単調性を可能にする基本的条件は、システムの安定性を規定する固有値関係であることを論じる。

1. はじめに

分配変数である利潤率が変化した場合、それに誘発される相対価格の動きについては明確なことが言えないという Sraffa 型システムの伝統的な複雑性教義に対して、相対価格変動の単調性を主張する議論の一つに、Bidard and Steedman [1996] ⁽¹⁾ がある。彼らは、垂直統合システムの投入係数行列が正規行列 (normal matrix) または対角化可能 (diagonalizable) である場合に、利潤率が最大利潤率に向けて上昇するとき、価格ベクトル (または相対価格) が最大利潤率に対応する価格ベクトル (相対価格) に単調に収束することを論じている。

この小論の目的は、Bidard and Steedman [1996] の主張の妥当性を調べるとともに、利潤率の上昇に伴う相対価格変動の単調性の条件を研究することである。まず、準備として、Bidard and Steedman が代表的複雑性教義として挙げている Pasinetti [1977] の議論を取り上げる。次に、投入係数行列の対角化の議論に基づいて、相対価格が単調的動きをすると主張する彼らの議論を紹介

相対価格変動の単調性の条件

する（2節）。その後、単調性の条件を静学的脈絡と動学的脈絡に分けて調べる。投入係数行列の対角可能性だけでは相対価格変動の単調性には不十分であって、固有値条件こそがシステムの解の存在や安定性に係わり、変動のあり方を規定する条件であることを明らかにする（3, 4節）。最後に、結論をまとめる（5節）。

2. 準備

(1) Pasinetti の複雑性学説

Pasinetti (1977, 5.6) は、均衡利潤率 r が上昇するとき相対価格がどのように変化するかという問題に対して「単純な答えは全く得られない」(p. 82) と言いつつも、利潤率の変化の相対価格への影響を動学的脈絡と静学的脈絡の両方で論じている。

結合生産がない、流動資本だけの Sraffa 型の価格方程式

$$P = wl + (1+r)PA \quad (1)$$

が仮定されている。 P は生産価格ベクトル ($n \times 1$)、 r は部門共通の利潤率、 w は共通の貨幣賃金率、 A は資本投入係数行列 ($n \times n$) で、 (i, j) 番目の要素を a_{ij} で示す。 l は労働投入係数ベクトル ($n \times 1$)。それぞれ非負と仮定される ($A \geq 0, l \geq 0$)。ただし、労働はすべて財の生産に直接または間接に必要とされると考えられている。賃金率 w がゼロのとき、利潤率 r は最大利潤率 R に等しい。

動学的脈絡では、貨幣賃金率 $w=1$ の仮定の下で、利潤率 r の最大利潤率 R に向けての上昇に対して諸生産物の価格は増加するが、個々の生産価格の増加速度が違うであろうことから、相対価格の単調な運動はないと推測している。そして、 $(w, r) = (1, 0)$ から $(w, r) = (0, R)$ への分配変数の推移のような dynamic で global な変化については、価格構造が変化するため、賃金と利潤の分配変数の関係自体が影響を受け、それが再び価格構造に影響を及ぼし、さらにそれが賃金率と利潤率の関係に跳ね返るというような影響・反影響を問題とし

ている。

静学的脈絡では、利潤率の微小な変化の相対価格への局所的効果を調べている。いま w を 1 とおく。第 1 財の価格 P_1 表示の第 j 財の価格 (P_j/P_1) が利潤率の変化により増大するか減少するかを比較静学的にその効果を求めている。第 1 財を基準にとると、第 j 財との相対価格は

$$\frac{P_j}{P_1} = \frac{l_j + (1+r)\sum_{i=1}^n a_{ij}P_i}{l_1 + (1+r)\sum_{i=1}^n a_{i1}P_i}, \quad j=2,3, \dots, n \quad (2)$$

である。これを利潤率で微分して次式 $\frac{d}{dr}\left(\frac{P_j}{P_1}\right)$ が得られる、

$$[P_1\sum_{i=1}^n a_{ij}P_i - P_j\sum_{i=1}^n a_{i1}P_i] + (1+r)\left[P_1\sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{dP_i}{dr} - P_j\sum_{i=1}^n a_{i1}\frac{dP_i}{dr}\right] \quad (3)$$

ここで、最初のカッコ内が「資本集約度効果」と呼ばれるもので、後のカッコ内が「価格効果」と呼ばれているものである。前者は、ある与えられた利潤率で、ニュメレール財である第 1 財産業の資本集約度に比して第 j 財産業のそれが大きいかどうかで正負が決まる。第 j 産業の資本集約度が相対的に大きければ、利潤率の微小な変化に対して相対価格は上昇するが、資本集約度が相対的に小さければ、相対価格は減少する。ただし、資本集約度自体が利潤率に依存して変化するので、異なる利潤率では資本集約度の大小が逆転する可能性があり、可能なすべての利潤率で一義的に正負が決まるわけではないという注意書きが付帯している。次に、後者の価格効果は、利潤率の変化が全価格に与える効果の総合として決まり、各部門の相互依存関係のあり様により正にも負にもなるという。

従って、ある特定の利潤率で、利潤率の微小な変化の相対価格への効果はこれらの総合として決まる、という程度以上の確たる結論は得られないというのが Pasinetti の立場であろう。ただし、「資本集約度効果」の方が「価格効果」よりも強い旨の推測が付け加えられている。

相対価格変動の単調性の条件

(2) Bidard and Steedman の単調性学説

Bidard and Steedman [1996] は結合生産モデルを使用しているが、本稿の目的からは、(1)式の単一生産物モデルで十分である。(1)式の間投投入を分解して、次の垂直統合モデルを得る。

$$P = wL + rPH \quad (4)$$

ここで、 $L = l(I - A)^{-1}$ 、 $H = A(I - A)^{-1}$ 。Hは単一の正の実固有値 h_1 を持つと仮定される。Hには負の要素があってもよいが、 h_1 は他の実固有値や複素固有値の実部よりも絶対値で大きいと仮定される。賃金率ゼロに対応する最大利潤率 R について $h_1 R = 1$ である。また、所与の技術 (H, L) のもとで、価格ベクトルは外生変数とみなされる利潤率の関数である。

次に、 H は正規行列 (normal matrix) と仮定され、

$$H = QAQ' \quad (5)$$

表示される。 Q は直行行列、 Q' はその転置行列、 A は対角行列である。簡単化のため、厳密に対角であるとしよう。

(4)式に右から Q を乗じて、 $PQ = \pi$ 、 $LQ = \lambda$ とおけば、

$$\pi = w\lambda + r\pi A \quad (6)$$

を得ることができる。 π や λ は直角回転したものなので、2つの価格ベクトル $P(r)$ と $P(R)$ の挟む角度 (Euclidean angle) とそれらに対応する $\pi(r)$ と $\pi(R)$ の挟む角度は変わらないので、 $\pi(r)$ を用いて議論が進められている。

Bidard and Steedman は3財モデルを考えたのちにそれを一般化している。3財モデルのほうが具体的で簡明であるから、ここでも取り上げる。彼らの元のモデルでは複素数固有値の場合も検討しているが、以下では、議論の簡単化のため、 H が実対称行列の場合だけを明示する。この場合、投入係数行列 A の対角線上には実固有値 (h_1, h_2, h_3) がならぶ。上述のように、 h_1 が最大の正の固有値である。

係数行列が厳密に対角形である場合、各財の価格は他の財の価格から独立するので、計算は非常に楽になる。 π の i 番目の要素を (π_i) で示すと、

$$\pi_i = \frac{w\lambda_i}{1-h_i r} \quad i=1, 2, 3 \quad (7)$$

と求められる。 $0 \leq r < R$ の r に対しては、 $\pi_i > 0$ である。賃金率がゼロの場合、利潤率は最大 R で $h_1 R = 1$ 、そのときの価格ベクトルは、 $\Pi = (1, 0, 0)$ で示される。ある利潤率 r の元での価格ベクトル $\pi(r)$ と最大利潤率 R のときの価格ベクトル $\Pi = (1, 0, 0)$ の挟む角度 $\theta(r)$ について、

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta(r) &= \frac{\pi_2^2 + \pi_3^2}{\pi_1^2} \\ &= \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^2 \left[\frac{1-h_1 r}{1-h_2 r} \right]^2 + \left[\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right]^2 \left[\frac{1-h_1 r}{1-h_3 r} \right]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。(8)式に基づいて、所与の技術の下で、利潤率 r を最大利潤率 R にむけて上昇させて行くと、(8)式の右辺はゼロに収束する。従って、 $\pi(r)$ は、単調に、 $\Pi = (1, 0, 0)$ に収束すると考えられている。

このような価格ベクトルの単調な動きをもたらす主因は、正の最大固有値 h_1 をもった投入係数行列 H が正規行列であるという点に見出されている。従って、正規行列でなくとも、簡単な座標変換により係数行列が(5)のように対角化可能であるならば同じ議論が成立するので、議論の一般化としてそのような変換が可能であるという主張とともに、価格ベクトルの単調な動きが結論されている。

3. 静学的考察

Bidard and Steedman の議論の主たる特徴は2つある。1つは、本来の生産価格の式(1)ではなく、垂直統合モデル(4)を用いていることである。もう1つの特徴は、静学的枠組みを用いて、動学的主張を行っていることである。後者については、節を改めて論ずることとし、まず前者について考察する。

当然の疑問は、垂直統合モデルではなく、本来の生産価格式(1)の係数行列 A が対角行列ならばどうなるか、であろう。簡単化のため、3次元で考察す

相対価格変動の単調性の条件

る。係数行列 A が対角行列ならば、対角要素には固有値 a_1, a_2, a_3 が並ぶ。ここでも簡単化のため、それらはすべて実数であるとしよう。各部門はそれぞれ自己充足的で、各財が Sraffa の標準商品のような財となる。価格は簡単な計算で、(7)式と類似の形で次のように求まる。

$$P_j = \frac{wl_j}{1 - (1+r)a_j}, \quad j=1, 2, 3$$

ここで、 $(1+r)a_j < 1$ を仮定している。

(2) または (3) に基づいて、 $\frac{d}{dr} \left(\frac{P_j}{P_1} \right)$ を求めると、その符号の正負が行列 A の各固有値の大小関係に依存して決まることが分かる。即ち、

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{P_j}{P_1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (a_j - a_1) \geq 0 \quad (9)$$

である。非負最大固有値を a_1 とすれば、

$$a_j < a_1, \quad 0 < |1 - (1+r)a_1| < |1 - (1+r)a_j| < 1 \quad (10)$$

であるから、資本集約度効果と価格効果はともに負になる。従って、利潤率の局所の上昇に対して、第1財を基準とした第2財と第3財の第1財の相対価格はともに減少する。第1財の資本係数が高いために利潤率の上昇に対して第1財が最も大きく上昇するからである。他方、第2財をニューメールとすれば、 $\left(\frac{P_1}{P_2} \right)$ は上昇するが、 $\left(\frac{P_3}{P_2} \right)$ が上昇するか下落するかは、固有値 a_2 と a_3 の大小関係に応じて決まる。

結局、各部門の価格が独立的に動くこの場合には、利潤率の上昇に対して、各財の価格がどれだけ上昇し、相対価格ベクトルがどうなるかは、各固有値の大小関係が分かれば、それなりに明確なことを言うことができる。投入係数が対角行列であっても、固有値の大小関係や大きさが分からなければ、各財の価格の変化の割合が分からないので、相対価格がどのように変化するかについて明確なことは言えない。対角化が意味をなすのは、固有値関係が簡単化され、大小関係等が判明するという点においてである。

Bidard and Steedman のように角度(8)式の数値を(1)のシステムにおいて求めることも容易であり、(8)式と類似の式が得られる。そして、非負最大固有値を a_1 とすれば(9)の関係が成立するので、利潤率の上昇に伴う価格ベクトルの運動について、Bidard and Steedman と全く同様の推論を行うことができる。

逆に言うならば、Bidard and Steedman の単調性議論を可能にしている要諦は、係数行列の対角化だけにあるのではなく、それによって単純化される固有値関係に置かれた想定に存在する。対角化のような行列の相似変換は固有値を変えない座標変換であるから、システムの解の動向は一般に変わらない。対角化によって、表示や計算が容易になり、固有値関係も単純化されるが、複素数が現れる可能性とともに実際の現象のフィクション化の可能性が高まるリスクもある。それ故、敢えて対角化の方法をとらないという路もある⁽²⁾。

上記の3財モデルを一般の n 財モデルに拡張しても、同様の議論が可能であるから、結局のところ、必ずしも対角化可能であるとは限らない非負投入係数行列を考え、固有値関係に特段の仮定を置かない一般的議論においては、理論上は、Pasinetti の複雑性学説の方が単調性学説よりも妥当性を有するよう⁽³⁾に考えられる。ただし、実際の計算によって固有値関係の数値が求まるような場合には、上述の例のように、両効果の大きさが具体的に求まり明確なことが言える可能性はある。

4. 動学的考察

4.1 Bidard and Steedman の議論の特徴のいま一つは、静学分析のなかで動学的命題を引き出していることである。彼らの議論においては、外生変数である均衡利潤率の最大利潤率への連続的移行に対して、価格ベクトルが最大利潤率のときの価格ベクトルに連続的にかつ単調に収束するか否かを問題にしているので、通常の比較静学ではない。また、利潤率が現行の値からジャンプしていき⁽³⁾に最大利潤率に移行したときの、価格ベクトルの動学的経路を問題とし

相対価格変動の単調性の条件

ているのでもない。利潤率が段階的に引き上げられても、あるいは連続的に引き上げられても、価格ベクトルの単調な動きが得られると考えられている。即ち、利潤率が上昇するとき、上昇の仕方に係わりなく、

$$|1-rh_1| < |1-rh_j| \quad (j=2, 3)$$

に基づいて、2つの価格ベクトルの挟む角度が小さくなることをもって、価格ベクトルの単調な収束が起こることを当然視しているわけである。

Bidard and Steedman の議論では、(1)式や(4)式の生産価格式は長期均衡において成立する式であると理解されているが、長期均衡に至る価格調整については何ら明示されていない。利潤率が上昇した場合に、それに対して価格がどのような調整的变化をするのかを示す動学方程式がないまま、利潤率の上昇に対する相対価格の調整的変動の単調性が推論されている。しかし、ベクトルの挟む角度の減少とベクトルの収束運動（しかも単調収束）とは必ずしも同一ではない。

4.2 そこで、議論をさらに進めるために、(6)式が長期均衡下の式になるような簡単な動学方程式を用いて考察を進めることにしたい。利潤率 r が与えられると、時間 t の極限において、(6)式が成立するような1階の差分方程式を考える。

$$\pi_t = \pi_{t-1}[rA] + w\lambda, \quad t=1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

ここでは、技術係数 (A, λ) を所与として、利潤率や賃金率を外生的に扱い、価格ベクトルの調整的運動を考えている。

価格調整が行きつくした極限では、(6)式

$$\pi = \pi[rA] + w\lambda$$

が成り立つ。 $U_t = \pi_t - \pi(\pi_0 = \pi)$ とおくと(11)式から(6)式を引いて

$$U_t = U_{t-1}[rA], \quad t=1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

が得られる。 $0 \leq r < R$ の r に対しては、対角行列 $[rA]$ の絶対値最大の固有値は rh_1 で1より小であると仮定されているから、すべての実固有値または複素

数固有値の実部は1より小である。よって、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $U_t \rightarrow 0$ 。つまり、極限では、(6)式の価格が得られる。

なお、複素数固有値が存在する場合、複素数部分は解に振動性を与えるので、このような場合、それだけで、解の動きは単調ではなくなる。

次に、均衡利潤率を最大利潤率に向けて段階的に上昇させることを考える。即ち、

$$r \rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow \dots \rightarrow R.$$

利潤率が r_1 に上昇したときには、投入係数行列は $[r_1 A]$ となる。価格ベクトル π_1 は利潤率の変化前の $\pi_0 = \pi$ に係数行列 $[r_1 A]$ を乗じて、 r_1 に対応する賃金部分をそれに加えることによって得られる。このようにして順次定まる価格ベクトルは、前の利潤率 r に対応する極限価格ベクトルではなく、 $[r_1 A]$ に属する価格ベクトルに収束していく。ここで、長期均衡価格ベクトルは安定であると考えている。

このような長期均衡価格への収束を前提にすれば、収束プロセスが瞬間的でない限り、利潤率が $r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4$ と上昇するたびに、前の利潤率の下での収束プロセスは中断されて、新しい利潤率と新しい係数行列に規定される価格ベクトルに向けて超長期において収束運動を示すであろう。最終的に、 R が実現したときの極限価格ベクトルが Bidard and Steedman の議論で所望されている価格ベクトルである。このときの係数行列の絶対値最大の固有値 $h_1 R$ は1であるから、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $U_t \rightarrow 0$ とはならず、第2要素と第3要素だけがゼロとなる。

ともあれ、(11)式のような動学方程式を仮定すれば、利潤率を最大利潤率に向けて段階的に上昇させていくとき、価格ベクトルは、ある利潤率に規定される長期均衡価格ベクトルに向けての収束運動を展開しているなかで、利潤率の切り上げにより、その収束プロセスが中断され、切り上げられた利潤率に対応する新たな均衡価格ベクトルに向けて収束運動を始める。収束と中断のプロセスを繰り返す限り、最大利潤率に規定される均衡価格ベクトルに向けて当初か

相対価格変動の単調性の条件

ら単調な収束運動を示すということはないであろう。

投入係数行列が対角化されても、価格ベクトルの運動は、利潤率の変化とともに変わる固有値と固有ベクトルに規定される。動学方程式として、(11)式と異なるもの考えても、投入係数行列が同じであれば、この事情は基本的には変わらない。⁽⁴⁾

4.3 もし利潤率がいきなり最大利潤率にジャンプした場合にはどうなるであろうか。このケースは Bidard and Steedman の考えている利潤率の変化のケースではないが、価格ベクトルが R のときの極限価格ベクトル（例えば、上述の $\Pi=(1, 0, 0)$ ）に収束するかどうかという問題に関係している。(12)式の行列は $[RA]$ で示され、貨幣賃金率 w はゼロ。3つの固有値は Rh_1, Rh_2, Rh_3 である。仮定により最初のもは 1 に等しいが、残る 2 つは絶対値で 1 より小さい。

$$U_t = U_0 [RA]^t$$

であるから、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $[RA]^t \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

であり、 $U_t \rightarrow (U_{01}, 0, 0)$ となる。 U_{01} は利潤率 R に対応する均衡時の U_0 の第 1 要素であり、 $U_t = \pi_t - \pi$ の定義からゼロである。つまり、 U_t はゼロベクトルに収束するので、価格ベクトル π_t は π に、つまり、 $\pi = \pi [RA]$ をみたす π に収束する。ただし、第 1 要素については、時間経過の中で変化せず、第 2、第 3 要素がゼロに収束する形で価格ベクトルが収束する。このような意味では、価格ベクトルの動きは単調的であるということが出来る。

一般の n 次元の場合に拡張しても、個々の部門が独立して変動するわけであるから、同様の議論が成り立つことは容易に推測できる。そこで、一つのシステムとしての一般的視点から考察することにしよう。動学システムとして、

$$\pi_t = \pi_{t-1} [RA]$$

を考える。係数行列 H が上のように対角化できれば、解である価格ベクトル P_t （この場合は π_t に変換されている）は各固有値の特殊解の結合として表されることが差分方程式論において知られている。即ち、

$$\pi_t = C_1(Rh_1)^t x_1 + \cdots + C_n(Rh_n)^t x_n \quad (13)$$

である。 C_1, \dots, C_n は初期条件により決まる定数で、 x_1, \dots, x_n は各固有値 (Rh_i) ($i=1, 2, \dots, n$) の固有ベクトルである。 π_t の運動は各固有値の正負や大きさによって決まる。逆に言えば、行列が対角化可能で、(13)式のように独立した固有ベクトルの和として表されたとしても、固有値関係が決まらなければ、先験的には、価格変動のあり様について何も言えない。しかし、 (Rh_i) が絶対値最大の正の固有値であるという仮定が置かれれば、(13)の両辺をそれで割ると、 $t \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{\pi_t}{(Rh_1)^t} \rightarrow C_1 x_1$$

となる。固有ベクトル x_1 は最大利潤率成立時の価格ベクトルであるから、価格ベクトルは比率において所望の価格ベクトルに、つまり所望の相対価格に収束する。

さらに、価格ベクトルの収束運動がどのような初期時点価格ベクトルからでも単調減少的に収束すると言えるためには、固有値の絶対値が1よりも大きい固有値があればダメで、1以下、厳密には、1よりも小さいという条件が本来満たされなければならない。従って、Bidard and Steedman における $Rh_1=1$, $|Rh_i| < 1$ ($i=2, \dots, n$) という条件が効いていることがわかる。この条件は対角化とは直接関係しない固有値条件である。

ともあれ、このような固有値関係が仮定されると、利潤率がいきなり最大利潤率まで引き上げられた後の価格ベクトルの調整運動は、単調的なものとみなし得るであろう。しかし、このケースをもって、利潤率の上昇とともに、それに誘発される相対価格変動が単調的であると一般的に言うことは許されないであろう。

5. むすび

利潤率の上昇にともなう相対価格の変動が複雑であるという理論的主張は、実際の技術を反映する投入係数行列が各部門の相互依存を反映して対角化可能ではないという前提に立っての主張であるとすれば、対角化可能を仮定しての単調性の主張は反論としてあまり意義がないかもしれない⁽⁵⁾。しかし、この点を捨象して、対角化可能であるとしても、単調性の主張には、上で示したように、さらに固有値関係の条件が必要である。結論をまとめれば、以下の如くである。

(i) Pasinetti 流の比較静学的議論では、Bidard and Steedman の想定する固有値関係を仮定すれば、利潤率の変化に伴う相対価格の変化には単調性がみられるかもしれない。係数行列の固有値関係が相対価格の変化のあり方を規定している。

(ii) 彼らの主張、即ち、利潤率の上昇とともに相対価格が最大利潤率のそれに単調に収束するという動学的主張には明確な理論的根拠がないように思える。むしろ、利潤率が順次切り上げられるときの動学的調整経路は極めて複雑なものとなろう。

(iii) 利潤率が一度に最大利潤率に切り上げられるときには、価格ベクトルは単調な収束運動を示すかもしれない。それには、係数行列の対角化可能性の条件だけでは足りず、然るべき固有値関係の条件が不可欠である。

注

- (1) 本稿で取り扱う Bidard, C and I. Steedman [1996] よりも強い単調性の主張は Bidard, C. and U. Krause [1996] である。これについては、佐藤 [2018] で検討した。
- (2) 対角化にともなう非現実性の出現について、Pasinetti [1990] が同じ脈絡で言及している。
- (3) 例えば、Bidard, C and H. G. Ehrbar [2007] や Mariolis and Tsoulfiedes [2016]) を参照。Pasinetti の「資本集約度効果」と「価格効果」を発展的に研究し、前者が後者よりも強力であるが故に、理論的には複雑的であり得ても、現実の価格変動

は単調的であるという趣旨の議論が多いようである。

- (4) 本稿では、差分方程式を用いているが、微分方程式を用いても同様の議論ができる。
- (5) 垂直統合モデルの投入係数行列を対角化して価値と分配の関係を論ずることは、すでに Pasinetti [1990] が、自己の垂直統合モデルと対角化の手法を用いて価値と分配の関係を論じた先駆的研究である Goodwin [1976] の正規化座標モデルとの比較考察において行っている。そこで、彼は対角化モデルにおける最大利潤率の価格ベクトルまで論及しているが、対角化の手法をあまり評価していないようである。また、静学的対角化モデルに動学的調整の内容を盛り込むようなこともしていない。

参 考 文 献

- Bidard, C. and U. Krause [1996], “A monotonicity law for relative prices,” *Economic Theory*, 7. pp. 51-61
- Bidard, C and H. G. Ehrbar [2007], “Relative Prices in Classical theory,” *Bulletin of Political Economy*, 1: 2, pp. 161-212.
- Bidard, C and I. Steedman [1996], “Monotonic Movement of Price Vectors,” *Economic Issues*, Vol. 1, Part 2, September, pp. 41-44
- Goodwin, R. M. [1976], “Use of Normalized General Co-ordinates in Linear Value and Distribution theory,” in K. Polenske and J. Skolka (eds) *Advances in Input-Output Economics*. Cambridge, Mass.; Ballinger Publ. Co.
- Mariolis, T. and L. Tsoulfiedes [2016], *Modern Classical Economics and Reality: A Spectral Analysis of the Theory of Value and Distribution*, Springer, Japan.
- Pasinetti, L. L. [1977], *Lectures on the Theory of Production*, London, Macmillan.
- Pasinetti, L. L. [1990], “Normalized General Coordinates and Vertically Integrated Sectors in a Simple Case. in *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics: Essays in Honour of R. M. Goodwin*, ed. by K. Veluplay, Palgrave Macmillan.
- 佐藤伸明 [2019], 「分配変数の変化に伴う相対価格変動の単調性」, 神戸学院大学経済学論集, 第50巻第4号。