手術室における
スケジューリング問題

毛　利　進太郎
石　井　博　昭

神戸学院経済学論集
第49巻　第４号　抜刷
平成30年３月発行

手術室における
スケジューリング問題

毛　利　進太郎[1]
石　井　博　昭[2]

概　要

日本の医療現場では急速な高齢化や医療の高度化などにともない医師の長時間労働の常態化が深刻な問題となっている。また少子高齢化における社会保障費の増加も危機的な日本の財政にとっては大きな課題である。そこで医療の効率的なマネジメントを考えることは急務となっている。医療におけるスケジューリングの分野においてはその研究対象は長らく人員の割り当てが主たるテーマであったが，近年手術室のスケジューリングなど人員以外の資源を対象とした問題も取り上げられつつあり，その多くが整数計画問題という手法を用いている。本論文では手術室のスケジューリングを検討し，時間外労働を最小とする問題に対しヒューリスティックな近似的なアルゴリズムを提案する。

1　は　じ　め　に

近年，医療現場においては少子高齢化や医療サービスの高度化に伴いその負担は増大し続けている。他方，同じ原因で医療に関する費用は年々増大し国家の財政を圧迫し，医療サービスの効率的なマネジメントは重要な課題となってきている。

病院において手術は，利益という点においても医療サービスという点におい

（1）　神戸学院大学経済学部
（2）　大阪大学名誉教授

ても大きな部分を占めている。手術のスケジュールを決定するのは主に麻酔医らの人手によって行われており，その負担は非常に大きいものであり，また効率化を行う余地が存在する。そこで近年，これらの問題を対象にスケジューリングを行うシステムの実用化に向けて多くの研究が行われており，Cardo らがその分類を行っている。そこでは手術スケジューリング手法を患者の特性，スケジュールの評価指標，研究のアプローチや最適化手法によって問題を分類している[1]。また Vijayakumar らは手術症例に2次元ビン・パッキングのアプローチを提案した[6]。彼らは，混合整数問題とその問題に対するヒューリスティックアルゴリズムを適用している。

多くの研究に共通しているのは現実的な制約を取り入れるために整数計画法として定式化を行うか，またはメタ・ヒューリスティックス手法によるアプローチを行っていることである。本研究では従来からの離散最適化問題としてのスケジューリング問題として検討し，最適化を行うアルゴリズムを検討する。

2 問 題 設 定

医療の現場におけるスケジューリング問題を考える上で，まず考慮すべきことは手術はその症状に基づき様々な制約があり，特に手術の期限については非常に厳格で遅れることが許されない場合が存在するということである。我々の検討するモデルは1日のうち手術が可能なおおよその時間が設定されているものとし，さらに厳格な期限が存在するものとする。ただしその期限は期日として決められているとし，もし各手術が期限の制約を満たすことができない場合，時間を拡張することで制約を満たすようにできるということを考える。つまり，各日において手術可能な時間が標準業務時間として定められており，また各手術には期日が定義されているとする。各手術は期限の制約に違反することは許されない代わりに，標準業務時間の制約を延長することが可能である。この標準業務時間の延長を最小とすることを考える。

2.1 定 式 化

ここで先に述べた問題をスケジューリング問題として問題を定式化する。各手術はジョブとして定義され，手術室は機械として定義される。この問題の解は，すべて手術が納期の制約を満たすように割り当てられた最適な実現可能なスケジューリングを得ることである。我々の問題は，次のように定式化される。

- $j_1, \cdots, j_n$: n 個のジョブがあるものとする。
- 処理時間 p_i（$1 \leq i \leq n$）は，ジョブ j_i を処理する時間とする。
- 割り当てスケジュールの対象となる期間を D 日とする。
- m は手術室を指すインデックスとする。
- l（$1 \leq l \leq D$）は期間 D の内のある日をさすインデックスとする。
- 時間 T_l は期日 l に定義されている標準的な手術業務時間の合計とする。
- 各ジョブ j_i は納期日 d_i が決められている。
- すべてのジョブは，納期前に完了しなければならない。

もし標準的な業務時間内ですべてのジョブを処理し，かつ納期の制約を満たす実行可能なスケジュールが存在しないならば，業務時間を延長することができるものとする。この業務時間の延長を最小とするものを最適スケジュールとする。すなわち，標準的な業務時間は延長されることを見越しており，延長が必要ない場合，つまり十分に余裕がある場合はスケジュールを最適化すべき必要はないものとする。

我々の目的関数は以下のように定義される。

集合 $J_{m,l}$ を手術室 m において期日 l で処理するジョブの集合とする。$P_{m,l}^{\mathrm{sum}}$ を手術室 m において期日 l で処理する実際の業務時間の合計時間，すなわち集合 $J_{m,l}$ 処理時間の合計とする。$E_{m,l}$ は手術室 m において期日 l での延長時間であり，$E_{\max}$ を全ての手術室とすべて期間における $E_{m,l}$ の最大値とする。この問題の目的は $E_{\max}$ を最小にすることである。

- $P_{m,l}^{\mathrm{sum}} = \sum_{\mathrm{All}\ J_{m,l}} p_i$ （１）
- $E_{m,l} = \max\{T_l, P_{m,l}^{\mathrm{sum}}\} - T_l$ （２）

- $E_{\max} = \max_{\text{All } m,\, l}\{E_{m,\,l}\}$ （３）
- Minimize $E_{\max}$ （４）

2.2　ビン・パッキング問題

前節のスケジューリング問題を考えるために，変形ビン・パッキング問題を考える。最も基本的なビン・パッキング問題では，複数の大きさが異なるアイテムがあり，固定された容量の複数のビンの中すべてのアイテムを収めることを考える。この時にすべてのアイテムを容量制約を満足しながら収めることができるビンの数を最小とすることが目的となる。本研究では，ビンの容量を可変とし，決められた数のビンに対してすべてのアイテムを収めることを考える。この問題では目的関数は拡張されるビンの容量であり，それを最小とするのが目的である。

前節の問題を次のように変換する。各ジョブは，ビンに収めるアイテムとし，その業務時間はそれぞれのアイテムの大きさである。ビンの数は $m \times l$ あるものとし，日時 l において手術室 m に対応するビン B_{ml} を定義する。日時 l において手術室 m で処理される手術はそのビンに収められるアイテムとする。アイテムの容量は 1 日の標準業務時間であり，それを超える量が標準業務時間を超えた業務時間に等しい。

ビン・パッキング問題は NP 完全であり，厳密な最適解を求めるアルゴリズムは存在しない。しかしながら，上記の問題の近似解法 MFD が，石井によって与えられている[４]。最も基本的なヒューリスティックな解法である FFD は，古典的なビン・パッキング問題の近似アルゴリズであり，任意のビンに含まれていない最大のアイテムを，それを収めることができる最小の空き容量があるビンに収めていくアルゴリズムである。この FFD に基づき，MFD は適切に容量の上限と下限を設定することで繰り返し FFD 適用する。それによりすべてのアイテムを収めることができるビンの容量を最小にする解を容量に関す

る二分探索により求める。

2.3　アルゴリズム

すべての納期が同じである場合，MFD によって問題を解くことができる。この節では，納期の異なる手術について繰り返し MFD を適用することで解を得るアルゴリズムを提案する。

Algorithm RMFD

1. l_i はそれぞれのジョブの納期を昇順にならべたものとする。
2. 各ジョブをそれぞれの納期 d_i に応じてジョブの集合 J_{l_i} に分割する。
3. 各ジョブ J_{l_i} に対して，ビンの集合 B_{l_i} を定義し，期日 l_{i-1} から l_i までの手術室の数に対応しているものとする。n_{l_i} は期日 l_i のためのビンの数とし，すなわち $n_{l_i}=|B_{l_i}|$ とする。ジョブの集合 J_{l_i} とビン集合 B_{l_i} について $E_{\max, l_i}$ を求める。
4. ジョブ集合 J_{l_i} を最も大きい $E_{\max, l_i}$ であるジョブの集合とする。集合 J'_{l_i} を J_{l_i} の部分集合とし J'_{l_i} の要素は $((E_{\max, l_i}-E_{\max, l_{i-1}}))/n_{l_{i-1}}<\sum_{J'_{l_i}} p_i$ かつ最も処理時間の小さいジョブのものとする。部分集合 J'_{l_i} を $J_{l_{i-1}}$ に $J_{l_{i-1}}=J_{l_{i-1}}\cup J'_{l_i}$ となるように加え，再度 MFD を $J_{l_{i-1}}$ と J_{l_i} に適用する。新たに $E_{\max, l_{i-1}}$ と $E_{\max, l_i}$ を得る。
5. もし $E_{\max, l_{i-1}}<E_{\max, l_i}$ ならば再度 Step. 4 を適用する。
6. もし $i=1$ ならば停止する。

このアルゴリズムは最も $E_{\max, l_i}$ が大きい期日 l_i のジョブを前の期日に移し MFD を繰り返し適用することにより，業務時間の最大延長を減らす。

3　資源制約のある問題

本節では資源の制約があり，手術室が 2 つである場合のスケジューリング問題を考える。手術室のスケジューリング問題における資源制約は様々なケースがあるが，ここで考慮するのは医者，ナースの人数といった同時に利用できる資源の量に制約はあるが一度利用した資源は次の手術において利用可能である再利用可能な資源である。すなわち資源の集合 $\{R_1, R_2, \cdots, R_s\}$ があり，R_k が同時に利用できる量の上限 B_k が定められているものとする。それぞれのジョブ j_i には資源 R_k の必要な量 r_{ik} が決められている。あるタイミングおいて 2 つの手術室で同時に実行されている手術を j_{i_1}, j_{i_2} とすると，すべての期間において，

$$r_{i_1k}+r_{i_2k}<R_k,\quad i=1,\cdots,s$$

が成立するものとする。

前章での問題において，ジョブの処理時間がすべて同じである場合に，この資源の制約を考慮する。資源制約を満足しつつ，すべての手術室の延長時間である $E_{\max}$ を最小とするのがこの問題の目的である。

3.1　資源制約のある並列機械スケジューリング問題

資源制約のある並列機械スケジューリング問題において処理時間が $p_i=1$ すなわち処理時間がすべて等しい場合に最大完了時間を最小化するアルゴリズムは Garey らによって提案されている[5]。

彼らは資源制約のあるスケジューリング問題をグラフ G のマッチング問題に変換し，それにより最大完了時間を最小とする問題を解いている。そのアルゴリズムは下記のとおりである。

Garey and Johnson Algorithm（GJA）

1．ジョブ j_i を頂点 N_i に対応させたグラフ $G(N, E)$ を考える。ここで辺は j_{i_1},

j_{i_2} に対しすべての資源 R_k に対し，$r_{i_1k}+r_{i_2k}<R_k$ が成立している場合，すなわち同時に処理できる場合に辺で接続する。

2. グラフ $G(N, E)$ 上の最大マッチング M を求める・最大マッチングを求めるアルゴリズムは Even らによって与えられている[２]。
3. 最大マッチング M において辺で接続されたペアを同時に処理するスケジュールを構築する。

このアルゴリズムにより資源制約のある並列機械スケジューリング問題の解を得ることができる。さらに資源消費量の上限がファジィ数として与えられている場合における最大完了時間と満足度との多目的問題は Harikrishnan らによって解かれている[３]。

3.2　アルゴリズム

前節の問題においてすべての納期が同じである場合，先のアルゴリズム GJA によって問題を解決することができる。そこで納期が異なる手術について繰り返し GJA を適用すること解決するためのアルゴリズムを提案する。

Algorithm RGJA

1. l_i はそれぞれのジョブの納期を昇順にならべたものとする。
2. 各ジョブをそれぞれの納期 l_i に応じてジョブの集合 J_{l_i} に分割する。
3. 各ジョブ集合 J_{l_i} に対して，期日 l_i において処理するものとして GJA を適用し $E_{\max, l_i}$ を求める。これより，最小の完了時刻を限られた期間に GJA を適用することにより，最小の完了時刻を得ることができる。
4. ジョブ集合 J_{l_i} を最も大きい $E_{\max, l_i}$ であるジョブの集合とする。集合 J'_{l_i} を J_{l_i} の部分集合とし J'_{l_i} の要素はグラフ G において最も次数が低いジョブのものとする。部分集合 J'_{l_i} を $J_{l_{i-1}}$ に $J_{l_{i-1}}=J_{l_{i-1}}\cup J'_{l_i}$ となるように加え，再度 GJA を $J_{l_{i-1}}$ と J_{l_i} に適用する。新たに $E_{\max, l_{i-1}}$ と $E_{\max, l_i}$ を得る。
5. もし $E_{\max, l_{i-1}}<E_{\max, l_i}$ ならば再度 Step. 4 を適用する。

6，もし $i=1$ ならば停止する。

このアルゴリズムではジョブを期日の前に移し GJA を繰り返し適用することにより，業務時間の最大延長を減らす解を求めることができる。

4 おわりに

本稿では，手術室のスケジューリング問題を考え，ビン・パッキング問題として問題を定式化し，その問題のための近似アルゴリズムを提案した。さらに再利用可能な資源制約がある問題についても考察を行った。しかし実際の現場においては，多くのタイプの手術のケースがあり，さらに様々なタイプの人的資源やその他の資源の制約がある。これらの状況を定式化とアルゴリズムの開発が今後の課題である。

References

[1] B. Cardo, E. demeulemeester, J. Beliën, Operating room planning and scheduling: A literature review, European Journal of Operational Research 201 (2010), 921-932.

[2] S. Even and O. Kariv, An O(n^2.5) algorithm for maximum matching in general graphs, System Symposium on Foundations of Computer Sciences, IEEE (1974), 100-112

[3] K. K. Harikrishnan and H. Ishii, Some fuzzy resource constrained scheduling problems, Asia Pacific Management Review 6 (2001), 477-484

[4] H. Ishii: Approximate algorithms for scheduling problem, Communications of the Operations Research Society of Japan, 31 (1986), 26-35 in Japanese.

[5] Garey, MR and Johnson DS, Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraint, SIAM J. Computing 4(1975), 397-411

[6] B. Vijayakumar et al., A dual bin-packing approach to scheduling surgical cases at a publicly-funded hospital, European Journal of Operational Research 224 (2013), 583-591.