標準価格への収束と双対性

佐　藤　伸　明

神戸学院経済学論集
第49巻　第４号　抜刷
平成30年３月発行

標準価格への収束と双対性

佐　藤　伸　明

要　旨

Sraffa の標準商品と双対的な標準価格の構成を賃金率の削減により生じる調整過程の収束問題として検討する。価格と数量の双対的動学方程式に基づいて，標準システムの漸近的形成を明らかにしている。

1．序

拙稿［2018］では，Sraffa（1960）の標準システムの構築を動学的体系の相対安定性の観点から考察した。そこでの議論，即ち，「思考実験」による標準商品ベクトルの正値性や一意性の議論（§37）は，標準システムにおける正の価格（標準価格）[(1)]が一意に決まることを論じる（§39）ための準備であったという見方が可能である。

利潤率を最大利潤率に近づけて行くと，標準価格システムが形成され，一意の正の価格ベクトルが決まることは，Lippi（2004）においても証明されている。また，Flaschel（2010）では，価格，賃金率および生産量が利潤率の連続関数であることを利用して，価格と生産量の標準システムが得られることを示している。両者の議論では，定常状態が仮定され，利潤率の極限移行によって所望の結果が得られているが，標準商品の存在との係わりが明示的に扱われていない。Sraffa の標準システムは定常的であるが，それに至る調整過程の議論は動学的であり[(2)]，そこで標準商品が係わっている。

まず，準備として，本稿の問題について述べる（２節）。次に，生産価格の

動学方程式に基づいて，賃金率を1からゼロに近づけて行くとき，調整過程の極限において，標準価格システムが得られることを示す（3節）。その際，資本集約度均等の仮定と標準商品の存在が利用される。その後，双対的な数量面の動学方程式を導入して，標準商品への収束を考慮し，価格面・数量面での標準システムの構築が極限において可能であることを明らかにする（5節）。最後に，資本集約度均等と代替的な比率についても同様のことが妥当することを示す（6節）。

2．Sraffa の調整過程

2.1　1部門1生産物の流動資本モデルを考える。剰余を含む生産方程式は，定常状態を仮定すれば，

$$p=(1+r)pA+wl \tag{1}$$

である。p は生産価格を示す $1\times n$ の非負（semi-positive）行ベクトル，$p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$。$A$ は $n\times n$ の流動資本の投入係数行列。要素の a_{ij} は j 財1単位生産に必要な i 財の量を示す。基礎財からなる経済を考え，行列は非負で分解不能と仮定する。r は各部門共通の利潤率，w は後払いの名目賃金率で，生存費レベルを超えた剰余賃金を表すものと考える。(3) l は労働投入を示 $1\times n$ の行ベクトル。労働は各産業にとって不可欠であるとし，$l>0$ と仮定する。

Sraffa（1960, Chap. 2～Chap. 4）によれば，生産方法（A, l）不変の下で，賃金率 $w=1$，利潤率 $r=0$ の状態から，賃金率を下げて行くと利潤が生じるようになり，これら分配変数の変化に対応して，生産手段の労働に対する比率の多様性を反映する形で諸価格が変化する。しかし，諸価格の変化は諸産業の欠損と剰余のバランスを回復する形で進行し，ゼロ賃金に対応する最大利潤率 R によって規定される「バランスを保つ比率」を回復する。そして，ついに

$$p^*=(1+R)P^*A \tag{2}$$

が成り立つと考えられている。ここで，p^* は標準価格ベクトル。Sraffa は§39で，一つの標準比率 R に対応して正の標準商品ベクトル q^* の構造が一意に決

まる（スカラー倍の自由度はある）のとまったく同様に，正の標準価格ベクトル p^* の構造が一意に決まることを述べている。

2.2　問題は，名目賃金率を１からゼロに減少させて行くとき，諸価格の変動とともに利潤率が最大利潤率に，そして，価格が標準価格に収束する，というSraffa の想定が妥当なものかどうかである。つまり，（２)式のような関係が極限（$t \to \infty$）において成立するかどうかである。定常状態の場合には，賃金率の下落とともに，$r \to R$ の極限移行を仮定することが妥当性をもつとしても，価格や利潤率の時間を通じた影響を考慮する場合には妥当性を欠くかもしれない。（１)，（２）から，

$$\frac{w}{p(I-A)q}=\frac{1}{lq}\left(1-\frac{r}{R}\right) \quad for \quad r \in [0, R] \qquad (3)$$

なる関係が見出される。ここで，q は生産量を示す非負（semi-positive）列ベクトル（$n \times 1$)。国民所得 $p(I-A)q$ と雇用量 lq を一定と考えれば，賃金率が時間とともにゼロに収束するとき，利潤率 r は最大利潤率 R に収束する。しかし，賃金率の変化に反応して，利潤率だけでなく，価格構造や生産構造が変化し，国民所得や雇用量が変化する状況では，Sraffa の想定は確認を要する事項であろう。

Sraffa は全体としての生産量やその部門構造を所与としている。標準商品の存在が確認された後では，生産量ベクトル q は標準商品 q^* に等しいことが前提にされているように思われる。しかし，実際には，賃金率の下落に対応する剰余の減少は，価格面だけでなく数量面でも生じる。分配変数の変化は価格面だけでなく生産や需要などの数量面にも影響すると考えられるので，価格 p の標準価格 p^* への収束と生産量 q の q^* への収束は，本来は同時に扱われなければならない対象と考えられる。次節では，$q=q^*$ の場合を検討する。その後，$q \neq q^*$ の場合を検討しよう。

3．動学体系

3.1　生産価格については，

$$p_t = (1 + r_t)p_{t-1}A + w_t l \qquad (4)$$

を仮定する。(4)式の意味は，右辺第1項が示す現存の資本価値およびそれに対する利潤と第2項の支払賃金の見込みとの和として価格が設定されるということである。技術 (A, l) は不変であるが，価格，賃金率，および利潤率は時間の関数で，変数に添え字の t をつけて示している。一つの商品の価格を基準として採用しても，(4)の価格方程式体系には，式が n 本，変数が $n+1$ であるから，条件や仮定を加えなければ，変数の動きについて明確なことは言えない。

賃金率を1から0へと引き下げるプロセスを，次のように表そう。

$$w_t = \alpha w_{t-1} \quad 0 < \alpha < 1$$

つまり，当初の状態 $w_0 = 1$ から一定率 α で減少させて行く。従って，

$$w_t = \alpha^t \qquad (5)$$

である。

3.2　賃金率が1から減少するとき，利潤率の変動に伴う諸価格の動きは「剰余と損失のバランス」を維持するように調整される。即ち，バランスの指標として，生産手段に対する労働量の比率である資本集約度が用いられ，それが各部門で均等を維持するような調整が考えられている。Sraffa の議論では，生産量ベクトル q が所与で（標準商品 q^* と考える），資本集約度も一定と仮定されているようである。資本集約度は次のように表される，

$$\mu = \frac{lq_t}{p_t A q_t} \qquad (6)$$

従って，$q^* > 0$ より，$l = \mu p_{t-1} A$ が成り立つので，(5)を考慮して，(4)式を次のように表そう。

$$p_t = p_{t-1}A(1 + r_t + \alpha^t \mu) \equiv p_{t-1}A(1 + s_t) \qquad (7)$$

s_t は剰余率というべきスカラーである。逐次解放により，（７）より，

$$p_t = p_0 A^t (1 + s_1)(1 + s_2)\dots(1 + s_t) \qquad (8)$$

を得る。

t 期のマクロ剰余率は，定義により，生産額の生産手段に対する比率であるから，

$$\frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = 1 + s_t \quad s_t \leqq R \qquad (9)$$

となる。この極限をとると，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = \lim_{t \to \infty}(1 + s_t) = 1 + \lim_{t \to \infty} r_t \qquad (10)$$

である。他方，（８）式考慮すれば，

$$\frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = \frac{p_0 A^t q^* (1 + s_1)(1 + s_2)\dots(1 + s_t)}{p_0 A^{t+1} q^* (1 + s_1)(1 + s_2)\dots(1 + s_t)}$$

ここで，係数行列 A の非負最大固有値を λ（>0）で示す。上式の分母・分子を λ^{t+1} で割れば，

$$\frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = \frac{p_0 (A/\lambda)^t q^* (1 + s_1)(1 + s_2)\dots(1 + s_t)}{p_0 (A/\lambda)^{t+1} q^* (1 + s_1)(1 + s_2)\dots(1 + s_t)} \left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (11)$$

を得ることができる。ここで，行列 A は安定 (primitive)，即ち，$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^t = A^*$ となる極限行列 A^* が存在すると仮定する。A^* は A の正固有ベクトルからなる行列［$q^* p^*$］である（4）。ただし，$p^* q^* = 1$ と正規化する。極限行列 A^* は一意に決まる。こうして，(11) より，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = \frac{1}{\lambda} \qquad (12)$$

を得る。右辺は（$1 + R$）に等しいから，結局，(10) と (12) より，

$$\lim_{t \to \infty} r_t = R$$

である。利潤率の収束が速やかで，価格の変動がそれに随伴すると仮定しよう。

このとき，(4)式が

$$p_t=(1+R)p_{t-1}A \tag{13}$$

と表され得るとすれば，逐次解法により，

$$p_t=p_0(A/\lambda)^t$$

である。従って，係数行列 A が安定であれば，

$$\lim_{t\to\infty}p_t=c_1p^*$$

となるある定数 c_1 がある。$c_1=p_0q^*$ である。価格 p_t は比率において標準価格 p^* に収束する。もし行列が安定でなければ，価格は循環的変動を示し，所望の結果に至らないであろう。

4．条件

上の証明において，幾らかの条件が効いている。即ち，

① 資本係数行列は安定である（分解不能かつ primitive），

② 生産手段に対する労働量の比率，いわゆる資本集約度は各部門で均等，

③ 均等な資本集約度は時間経過の中で一定にとどまる（$\mu_t=\mu$），

④ 生産量ベクトルは所与（標準商品），

以上である。本質的に見れば，これらの仮定は，Sraffa の叙述においても置かれているように思える。

①の仮定は，以下の議論にとっても必要である。定常状態を仮定する議論では，③は無視可能で，②と④は同値関係にある。動学的調整過程を考える場合には，賃金率が下落する状況で，各部門の資本集約度が均等で一定に維持されることはないかもしれない。しかし，②，③の仮定を外すと，さらなる条件を付け足さなければ，所望の結果には至らない。そして，均等利潤率の仮定も維持し得るかどうか怪しい。その結果，調整過程は複雑になり，賃金率の変化の利潤率や相対価格への影響は複雑で明確なことが言えないであろう(5)。本稿の目的から，以下では，②，③および均等利潤率の仮定を維持することにしたい。

④の仮定は数量面に係わる。価格面と数量面が独立的でなければ，数量面の考察も不可欠となる。t 期の国民所得，(６)式のマクロ資本集約度，そして(９)式のマクロ剰余率は，本来，価格と生産量に依存しているので，議論がこれらの変数に係わる範囲において，④のような仮定を置かない場合には，数量面の考察なしには明確なことは言えなくなる。

実際には，賃金率の引き下げによる価格面での剰余の削減は，数量面の物的剰余の削減と表裏の関係にある。次節では，剰余の削減により，価格面と数量面で，標準システムが構成され得ることを示す。

５．数量方程式

5.1　価格方程式(４)と双対的な数量方程式は，

$$q_t=(1+g_t)Aq_{t-1}+C_t d \tag{14}$$

である。ここで，g_t は部門共通の t 期の投資成長率，C_t は t 期の消費レベルを示すパラメータ，d は基礎消費ベクトル（$n\times1$）で，正かつ一定である。(6)

ここで，資本集約度に該当するのは，生産手段に対する消費額の比率 τ である，即ち，

$$\tau=\frac{p_t d}{p_t A q_t} \tag{15}$$

まず，価格 p_t が標準価格 p^* に等しい場合を考える。そして，賃金率の削減に対応するのは，消費レベルを１からゼロへ一定率 $\beta(0<\beta<1)$ で引き下げることである。賃金率を剰余賃金と考えたように，ここの消費も剰余消費と考える必要がある。問題は，極限において，$q^*=(1+G)Aq^*$ が形成されるかどうかである。

価格の標準価格への収束のときと同様に，(14)に(15)から得られる $d=\tau Aq_{t-1}$ を考慮して，

$$\begin{aligned} q_t&=Aq_{t-1}(1+g_t+\beta^t\tau)\\ &\equiv Aq_{t-1}(1+k_t)\quad k_t\leqq G \end{aligned}$$

とおける。これより，

$$q_t = A^t q_0 (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_t) \tag{16}$$

を得る。

こうして，価格方程式に基づく標準システムの構成と同様に，g_t の最大成長率 G への収束と生産量 q_t の標準商品 q^* への比率における収束を示すことができる。

5.2　価格と数量をともに固定しない一般的場合を考察する。ただし，資本集約度均等不変と生産手段に対する消費額の比率の均等不変の仮定は維持しなければならない。$\dfrac{p_t q_t}{p_t A q_t}$ に価格方程式（８）と数量方程式(16)を代入すれば，

$$\frac{p_t q_t}{p_t A q_t} = \frac{p_0 A^t (1+s_1)(1+s_2)\dots(1+s_t) A^t q_0 (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_t)}{p_0 A^{t+1} (1+s_1)(1+s_2)\dots(1+s_t) A^t q_0 (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_t)}$$

である。上と同様に，$\lambda^{t+1} \cdot \lambda^t$ で分母・分子を割り，極限をとると，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p_t q_t}{p_t A q_t} = \frac{1}{\lambda}$$

を得る。従って，$\lim_{t \to 0} r_t = R$, $\lim_{t \to 0} g_t = G = R$。そして，価格の標準価格 p^* への比率における収束と生産量の標準商品 q^* への比率における収束が得られる。

６．バランスを保つ比率（balancing proportion）

上の調整過程の議論では，「生産手段に対する労働の割合」の均等が重要な意味を持っていた。Sraffa（§22）は，これと代替的な割合として，「間接雇用労働に対する直接雇用労働の比率」と「生産手段に対する純生産物の価値比率」を挙げ，最後のものを使うのが便利だと述べている（p. 17)。第 2 のものは，

$$\frac{lA^v q^*}{lA^{v+1} q^*} = c_2 \quad for\ all \quad v = 0, 1, 2\dots \tag{17}$$

と表される。第 3 のものは，

$$\frac{p_t q^*}{p_t A q^*} = c_3 \quad for \quad t = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

と本質的に同等である。ここで，c_2 と c_3 は正の定数である。Sraffa の定常状態の議論では，定数（$1+R$）に等しい[7]。

我々の最後の関心は，第２，第３の割合に基づいて，価格の標準価格への収束が言えることを確認することである。(17)式から，$q^*>0$ であるから，$l = c_2 l A$ なる関係が成り立つ。労働 l が A の左 Perron-Frobenius ベクトルのケースで，これは価格 p_t と比例的になるので，資本集約度均等のケース（3.2節の議論）に帰着する。あるいは，p_t が労働 l と常に比例的であるから，次の(18)式のケースにも該当する。

(18)式は，(12)と比べてより直接的である。これを前提にすると，

$$p_t = c_3 p_t A \quad for \quad t = 1, 2, \ldots$$

が得られる。p_t は任意の時点で所望の標準価格に等しい。動学的には，価格方程式として，$p_{t+1} = p_t$ を考えれば，$p_{t+1} = (1+R) p_t A$ であるから，結局，(13)式が導かれる。従って，価格構造の標準価格構造への収束が得られる。

第２，第３の比率の場合，標準価格は第１のものより直接的に得られるが，賃金率引き下げに伴うバランスを保つ価格変化のような議論は行いにくい。

７．結び

労働の生産手段に対する比率の均等，およびそれと代替的な２つの比率のいずれかを前提にすれば，動学的調整の末に，標準価格が得られる。その際，生産面では標準商品に固定していた。他方，価格を標準価格に固定して，双対的な数量面の方程式を仮定して，生産量ベクトルの標準商品への収束を確認することができる。標準価格または標準商品を共に前提にしない場合には，価格，数量の両面での動学的方程式に基づいて，標準価格や標準商品が漸近的に得られる。

注

（1） 価格ベクトルが係数行列 A の Perron-Frobenius ベクトルであるとき，「標準価格」という。Pasinetti（1992）参照。Afriat（2008）は，‘Sraffa’s prices’ あるいは ‘consistent prices’ とよんでいる。

（2） Sraffa システムの動学的議論は Afriat（2008）や Egide（1992）にみられるが，本稿の問題は取り上げられていない。

（3） 剰余賃金については，Pasinetti（1977）Chap. IV 参照。

（4） 極限行列について，Nikaido（1968）p. 110, Theorem 8. 1 参照。

（5） 均等であっても，利潤率の変化に基づく相対価格の動きは複雑で，明瞭なことは言い難いという一般的教義にチャレンジする研究もある。例えば，Bidard（2004）Chap. 6 参照。

（6） 双対的数量方程式については，Pasinetti（1977）Chap. VII, Pasinetti（1989），Kurz and Salvadori（1995）p. 114 参照。

（7） Miyao（1977）では，定常状態の脈絡で，これらの 3 つの割合が賃金率－利潤率の線形関係（(3)式）と同値であることが証明されている。

参 考 文 献

[1] Afriat,N.S.（2008）‘Sraffa’s Prices,’ in G. Chiodi and L. Ditta（eds）*Sraffa or an Alternative Economics,* Houdmills: Palgrave Macmillan, pp. 45-67.

[2] Bidard, C.（2004）*Prices, Reproduction, Scarcity,* Cambridge Univ. Press.

[3] Egidi, M.（1992）‘Stability amd Instability in Sraffian Models,’ in *Italian Economic Papers I,* ed. by L. L. Pasinetti, Oxfod Univ. Press: originally published in Italian, 1975.

[4] Flaschel, P.（2010）’ Some Continuity Properties of a Refomulated Sraffa Model’. Reprinted in P. Flaschel, *Topics in Classical Micro- and Macroeconomics: Elements of a Critique of Neoricardian Theory,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 247-55.

[5] Kurz, H. D. and Salvadori, N.（1995）, *Thory of Production. A Long-Period Analysis.* Cambridge, Cambridge Univ. Press.

[6] Lippi, M.（2008）‘Some observations on Sraffa and mathematical proofs’, in G. Chiodi and L. Ditta（eds）*Sraffa or an Alternative Economics,* Houdmills: Palgrave Macmillan, pp. 243-52.

[7] Miyao, T.（1977）‘A Generalization of Sraffa’s Standard Commodity and Its Complete Characterization,’ *International Economic Review,* Vol. 18, Feb. pp. 151-62.

[8] Nikaido, H.（1968）*Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press.

[9] Pasinetti, L. L.（1977）*Lectures on the Theory of Production,* Columbia University Press, New York. 菱山泉，山下・山谷・瀬地山共訳『生産理論』東洋経済新報社，

1979年.

［10］ Pasinetti, L. L.（1992）‘《Standard Prices》and A Linear Consumption/Growth-Rate Relation,’ in *Italian Economic Papers I,* ed. by L. L. Pasinetti, Oxfod Univ. Press：originally published in Italian, 1989.

［11］ 佐藤伸明（2018）「Sraffa 標準システムの『アルゴリズム』について」，神戸学院経済学論集，第49巻第 3 号。

［12］ Sraffa, P.（1960）*Production of Commodities by Means of Commodities,* Cambridge：Cambridge University Press. 菱山泉・山下博共訳『商品による商品の生産』有斐閣，1962年.