R＆D の学習効果とジブラーの法則

常　廣　泰　貴

神戸学院経済学論集
第49巻　第３号　抜刷
平成29年12月発行

R＆D の学習効果とジブラーの法則

常　廣　泰　貴

1．は　じ　め　に

企業規模と企業成長率とは無関係であることはジブラーの法則として知られている。ジブラーの法則は比例効果の法則とも呼ばれ，新規参入が一定率である場合，この法則が成立すると企業規模の分布がパレート分布に従うことが示されている[（1）]。

このジブラーの法則については内生的成長理論の分野においても Segerstrom and Zolnierek（1999），Klette and Kortum（2004），Segerstrom（2007）および Acemoglu and Cao（2010）などによってそれが成立することが示されている。

それらに対して，Denicolò and Zanchettin（2012）では企業規模が拡大すれば期待成長率が低下していくというジブラーの法則が成立しないモデルが提示されている。そこではリーダーと呼ばれる既存企業１社とアウトサイダーと呼ばれる複数の自由参入する参入企業とで R＆D 競争が行われる。既存企業は技術水準において参入企業をリードしており，そのリード段階は R＆D の成功を重ねるにつれて増加していくが，一旦，参入企業に R＆D の成功を許したとすると成功した参入企業がその産業内の新たな既存企業となるとされている。また，リード段階の増加につれて R＆D の瞬間的成功確率で測った R＆D 費用は増加するとされている。すなわち，R＆D の成功を重ねてリード段階が増加

（１）　Simon（1955）を参照。また，Adachi, Nakamura and Osumi（2015）では企業規模と学習効果の関係が分析されている。

するにつれてR＆Dが段々と難しくなる場合が分析されている。

本稿でも Denicolò and Zanchettin に倣い，リード段階が増加するにつれてR＆Dの成功が難しくなるとするが，R＆Dの経験を重ねることによりR＆D効率が向上して行くというR＆Dに学習効果が働く場合においてジブラーの法則が成立するかどうかについて新たに検討する。また，Denicolò and Zanchettin ではR＆Dは規模において収穫一定とされているが，ここでのR＆Dは規模において収穫逓減であるとする。

本稿の構成は次のとおりである。次章で分析の基本となるモデルを提示し，第3章でR＆Dに学習効果の働かない場合についてみる。続く，第4章でR＆Dに学習効果が働く場合について考察を行う。最後に結語を示す。

2. モ　デ　ル

市場を独占している既存企業とその市場に参入しようとする複数の参入企業とのR＆D競争について考察を行う。既存企業が得ているフローの利得は過去の技術との技術水準の差に依存しており，その差が大きいほど，そのフローの利得は増大するものとする。この技術水準の差は既存企業がR＆Dを成功させるにつれて段々と大きくなっていくものとする。ただし，参入企業がR＆Dに成功したとすると既存企業は市場を奪われR＆Dに成功した参入企業が新たな既存企業として市場を独占するものとする。

R＆Dの形態についてみると，既存企業のR＆Dは既存の製品の質を改善するプロセス・イノヴェーションであり，参入企業のR＆Dは既存の製品に取って代わる革新的なプロダクト・イノヴェーションである。

既存企業がR＆Dに成功するとその技術水準が1段階上がるものとする。すなわち，i 段階リードしている既存企業がR＆Dに成功した場合，$i+1$ 段階リードの既存企業になるものとする。リード段階が増加するにつれて既存企業のフローの利得は増加していくとするが，リード段階には限りがありその最大のリード段階を m 段階とする。

以下では既存企業が i 段階リードしているときについてみる。このリード段階での既存企業のフローの利得を $\pi(i)$ とし，R＆D の瞬間的成功確率であるハザードレートを x_i とする。ハザードレート x_i を実現させるために必要なフローの費用は $\mathrm{C}(x_i,\ i)$ で表す。このフローの費用はハザードレートに関して逓増しており，

$$\mathrm{C}'(x_i,\ i)>0,\ \mathrm{C}''(x_i,\ i)>0,\ \mathrm{C}(0,\ i)=0 \qquad (1)$$

を満たしているものとする。

R＆D 競争への参入企業は対称的であるとし，簡単化のためそれらの参入企業のハザードレートは同じ値でありそれを y とする。

i 段階リードしている既存企業の期待利得の割引現在価値 $\mathrm{V}(i)$ は，次のベルマン方程式で表される。

$$r\mathrm{V}(i)=\max_{x_i}\{\pi(i)+x_i[\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{V}(i)]-k_i y\mathrm{V}(i)-\mathrm{C}(x_i,\ i)\}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \qquad (2)$$

$$r\mathrm{V}(m)=\pi(m)-k_m y\mathrm{V}(m). \qquad (3)$$

ただし，r は割引率である。(２)の右辺の第一項は i 段階リードのときのフローの利得であり，第二項は R＆D に成功したときの価値の増加分の期待値であり，第三項は参入企業の R＆D 成功によって被る価値の減少分の期待値を表している。k_i は参入企業数であり，$k_i y$ は参入企業全体でのハザードレートである。また，第四項は R＆D に必要となるフローの費用である。したがって，(２)の右辺はフローで表した R＆D による既存企業の期待利得である。既存企業は期待利得を最大にするようにハザードレートを決定するが，その最大となる期待利得は(２)の左辺の資産のもたらす期待利得と等しくなる。

既存企業は m 段階以上のリードはできないとしているので，リード段階が m 段階に達したときにはそれ以降 R＆D を行う誘因は無くなる。このときのハザードレートは $x_m=0$ であるので m 段階リードでの期待利得の割引現在価値 $\mathrm{V}(m)$ は，(３)を満たすように決まる。

リード段階が m 段階より小さいとき，既存企業の決定するハザードレートは次の一階の条件によって求められる。

$$\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{V}(i)=\mathrm{C}'(x_i,\ i).\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{4}$$

既存企業のリードが１段階上がるごとに，フローの利得は $g(>1)$ の率で増加するものとする。最大のリード段階である m 段階を含め，i 段階リードしているときの既存企業のフローの利得は次のように表されるとする。

$$\pi(i)=\pi_0 g^i.\quad (g>1)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{5}$$

ただし，π_0 は正の定数である。

また，(１)でみたようにR＆Dに必要となるフローの費用はリード段階とも関係しているが，そのフローの費用はリードが１段階上がるにつれてフローの利得と同じ g の率で増加するものとする。簡単化のため(１)を満たすフローの費用はハザードレートの２次関数であるとし，次のように表されるとする。

$$\mathrm{C}(x_i,\ i)=c_i g^i x_i^2.\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{6}$$

ただし，c_i は i 段階リードしている既存企業のR＆D効率に関わる正の値であり，その値が小さいほど同じハザードレートを得るために必要となるR＆D費用は小さくなる。

次に，参入企業の期待利得の割引現在価値についてみる。参入企業は対称的であるとしたが，それら参入企業はR＆D競争へ自由参入するものとする。また，参入企業のハザードレートを一定値 y であるとしたので，R＆Dに掛かるフローの費用も一定値 $\mathrm{c_E}(>0)$ であるとする。R＆D競争へ参入する際には参入費用として固定費用 $F(>0)$ が必要であるとする。このとき，参入企業の期待利得の割引現在価値 $\mathrm{V_E}$ は，

$$\mathrm{V_E}=\frac{y\mathrm{V}(1)-\mathrm{c_E}}{r+x_i+k_i y}-F\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{7}$$

$$\mathrm{V_E}=\frac{y\mathrm{V}(1)-\mathrm{c_E}}{r+k_m y}-F \tag{8}$$

で表される。

参入企業のＲ＆Ｄの形態はプロダクト・イノヴェベーションであり，参入企業がＲ＆Ｄに成功すれば新製品で１段階リードする新たな既存企業となるとする。参入企業がＲ＆Ｄに成功した場合，その期待利得の割引現在価値は V(1) となる。

Ｒ＆Ｄ競争を行う参入企業は自由参入するので，自由参入の結果，

$$\mathrm{V_E}=0 \tag{9}$$

となる。

（９）を用いることにより，（７），（８）はそれぞれ，

$$\frac{yV(1)-\mathrm{c}_E}{F}=r+x_i+k_iy \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{10}$$

$$\frac{yV(1)-\mathrm{c}_E}{F}=r+k_my \tag{11}$$

となる。

(10)，(11)の左辺は同じ値であり，それを a とする。

$$a\equiv\frac{yV(1)-c_E}{F}. \tag{12}$$

また，(10)，(11)の右辺の r，y は一定であるので，x_i，k_i，k_m は，

$$a=r+x_i+k_iy=r+k_m \tag{13}$$

という関係を満たす。

(13)より既存企業と全ての参入企業のハザードレートの総和である産業全体でのハザードレートは，リード段階によらず常に $a-r$ となることが分かる。

（２），（３）で表された既存企業の期待利得の割引現在価値についてみる。最大リードの m 段階では既存企業はＲ＆Ｄを行う誘因は無くなり，そのハザードレートは $x_m=0$ となるので，m 段階の既存企業期待利得の割引現在価値は，（３），（５），(13)より，

$$\mathrm{V}(m)=\frac{\pi_0}{a}g^m \tag{14}$$

と表される。

次に，i 段階リードの場合についてみると既存企業の期待利得の割引現在価値は，（２），(13)より，

$$\mathrm{V}(i)=\frac{\pi(i)+x_i\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{C}(x_i,\ i)}{a}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{15}$$

と表される。

（６）より，

$$\mathrm{C}'(x_i,\ i)=2c_ig^ix_i \tag{16}$$

であるので，（４），(15)，(16)より，i 段階リードの既存企業のハザードレートは，

$$x_i=a+\frac{\mathrm{V}(i+1)-\sqrt{4(ac_ig^i)^2+4\pi(i)c_ig^i+\mathrm{V}(i+1)^2}}{2c_ig^i} \tag{17}$$

と求めることができる。

（４），（５），(16)，(17)より，i 段階リードの既存企業の期待利得の割引現在価値は，

$$\mathrm{V}(i)=\left[\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0c_i+\left(\frac{V(i+1)}{g^i}\right)^2}-2ac_i\right]g^i \tag{18}$$

となることが分かる。

(18)の右辺の括弧内を，

$$v_i\equiv\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0c_i+\left(\frac{V(i+1)}{g^i}\right)^2}-2ac_i \tag{19}$$

で表すことにすると，i 段階リードの既存企業の期待利得の割引現在価値は，

$$\mathrm{V}(i)=v_ig^i \tag{20}$$

で表される。

(20)を用いると，(18)は，

$$v_i=\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0c_i+(v_{i+1}g)^2}-2ac_i \tag{21}$$

となる。

また，(21)を変形して $v_{i+1}g$ について求めると，

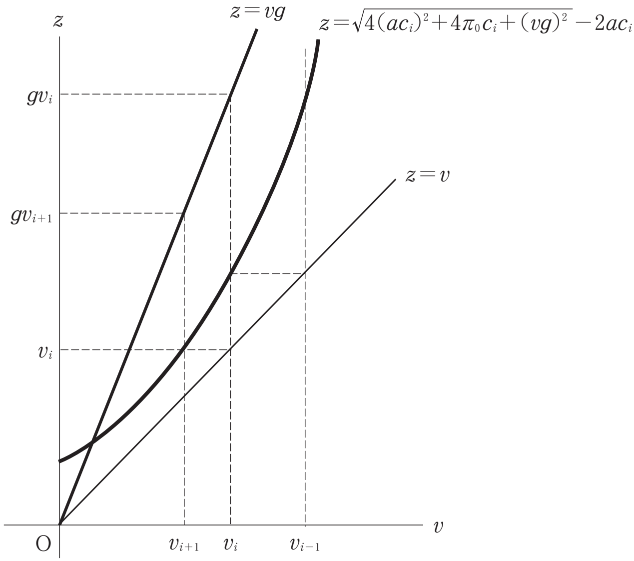

図１

$$v_{i+1}g=\sqrt{v_i^2+4ac_iv_i-4\pi_0c_i} \tag{22}$$

となる。

最大リードの m 段階では，それより上の段階が存在しないので，$v_{m+1}g=v_m$ であり，(21)より，$v_m=\pi_0/a$ であることが確かめられる。したがって，最大リードの段階においても期待利得の割引現在価値は(20)と同様に，$\mathrm{V}(m)=v_mg^m$ という形で表されることが分かる。

次に，i 段階リードの既存企業のハザードレートについてみる。まず，次の補題１が成立することが分かる。(証明は数学注１を参照。)

補題１

$$v_1>v_2>\cdots>v_{m-1}>v_m=\frac{\pi_0}{a}.$$

(17)に(20)，(21)を用いると，i 段階リードの既存企業のハザードレートは，

$$x_i=\frac{v_{i+1}g-v_i}{2c_i} \tag{23}$$

と表されることが分かる。

(23)の右辺の分子の符号関数についてみると，

$$\mathrm{sgn}[v_{i+1}g-v_i]=\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]=+1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{24}$$

であることが分かる。(証明は数学注 2 を参照。)

補題 1 より，リード段階が増加するにつれて v_i は減少するので $v_i>v_{i+1}$ となるが，(24)より，$v_{i+1}g>v_i$ であることが分かる。(これらの関係については図 1 を参照。)

したがって，既存企業のハザードレートは最大リードの段階 m 段階ではゼロであるが，それ以外のリード段階では正となることが分かる。

3. R＆D に学習効果が働かない場合

既存企業の R＆D のフローの費用は(6)で表され R＆D 効率に関わる c_i の影響を受けるが，ここでは c_i がリード段階によらず一定である場合について分析する。すなわち，既存企業が R＆D の成功を繰り返し，R＆D の経験を重ねたとしても R＆D 効率は変化しない場合を考える。これは R＆D に学習効果が働かない場合と解釈できる。ここでは R＆D に学習効果が働かない場合においてリード段階と，既存企業のハザードレートおよび期待成長率との関係についてみる。

3.1 リード段階とハザードレート（学習効果なし）

学習効果が働かない場合でのリード段階と既存企業のハザードレートの関係についてみる。i 段階リードの既存企業のハザードレートは，(23)で表されているが，

$$x_i=\frac{v_{i+1}g+2ac_i-\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0c_i+(v_{i+1}g)^2}}{2c_i} \tag{25}$$

と $v_{i+1}g$ によって明示的に表すことができる。

(25)より，ハザードレート x_i は v_{i+1} の関数であるので x_i と v_{i+1} の関係をみるために x_i を v_{i+1} で偏微分することにより，

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_{i+1}}=\frac{g}{2c_i}\left(\frac{\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}-v_{i+1}g}{\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}}\right)>0 \tag{26}$$

という関係が得られる。したがって，v_{i+1} が減少すれば，ハザードレート x_i も減少することが分かる。補題１より，v_{i+1} はリード段階が増加するにつれて減少するが，v_{i+1} の減少はハザードレート x_i を減少させるので，リード段階の増加はハザードレート x_i の減少をもたらす。したがって，次のことがいえる。

命題１　R＆D に学習効果が働かない場合（c_i が i によらず一定），ハザードレートはリード段階が増加するにつれて減少する。

$$x_1>x_2>\cdots>x_{m-1}>x_m=0.$$

3. 2　リード段階と期待成長率（学習効果なし）

学習効果が働かない場合でのリード段階と既存企業の期待成長率との関係についてみる。成長率は割引現在価値の変化分で表されるとすると，リード段階が i 段階であるときの成長率は既存企業が R＆D に成功すれば，

$$\frac{\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{V}(i)}{\mathrm{V}(i)} \tag{27}$$

となるが，参入企業が R＆D に成功すれば，

$$\frac{0-\mathrm{V}(i)}{\mathrm{V}(i)}=-1 \tag{28}$$

となる。既存企業，参入企業の R＆D の瞬間的成功確率であるハザードレートを考慮すると，i 段階リードの既存企業の期待成長率 E_i は，

$$\mathrm{E}_i=\frac{x_i(\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{V}(i))-k_i y\mathrm{V}(i)}{\mathrm{V}(i)}$$

$$=\frac{x_i(\mathrm{V}(i+1)-\mathrm{V}(i))}{\mathrm{V}(i)}-k_i y \tag{29}$$

と表される。

(13)，(20)より，(29)は，

$$\mathrm{E}_i=x_i\left(\frac{v_{i+1}g}{v_i}\right)+r-a \tag{30}$$

となる。

i 段階リードの期待成長率 E_i と $i-1$ 段階リードの期待成長率 E_{i-1} とを比較するためにそれらの差をとると，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_i-\mathrm{E}_{i-1}&=x_i\left(\frac{v_{i+1}g}{v_i}\right)-x_{i-1}\left(\frac{v_i g}{v_{i-1}}\right)\\&=\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}-\frac{v_i^2}{v_{i+1}v_{i-1}}\right)\frac{v_{i+1}g}{v_i}x_{i-1}\end{aligned} \tag{31}$$

が得られる。

まず，次の関係が成立することがいえる。(証明は数学注 3 を参照。)

補題 2

$$\frac{2\pi_0}{a}>v_i \Longrightarrow \frac{v_i}{v_{i+1}}>\frac{v_{i-1}}{v_i}.$$

補題 2 より，$(2\pi_0/a)>v_i$ であれば，$(v_i^2/v_{i+1}v_{i-1})>1$ となる。命題 1 より，$(x_i/x_{i-1})<1$ であるので，$(2\pi_0/a)>v_i$ であれば(31)の符号はマイナスであることが分かる。$v_m=(\pi_0/a)$ であるので，$i=m$ のとき，$(2\pi_0/a)>v_i$ が成立することは明らかである。補題 1 より，$v_1>v_i$ であるので，少なくとも $(2\pi_0/a)>v_1$ であれば，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ のときでも $(2\pi_0/a)>v_i$ が成立することが分かる。(12)，(20)より，$a=(ygv_1-\mathrm{c}_E)/F$ であることを用いると，$v_1<\bar{v}$ であれば，$(2\pi_0/a)>v_1$ となることが分かる。ただし，$\bar{v}=(\mathrm{c}_E+\sqrt{\mathrm{c}_E^2+8\pi_0 ygF})/2yg$ である。このとき，次のことがいえる。

命題２　R＆D に学習効果が働かない場合（c_i が i によらず一定)，少なくとも $v_1 < \bar{v}$ であれば，既存企業の期待成長率はリード段階が増加するにつれて減少する。

$$E_1 > E_2 > \cdots > E_{m-1} > E_m (= -k_m y).$$

最大リードである m 段階での期待成長率 E_m は $x_m = 0$ であることより $E_m = -k_m y$ となる。

4．R＆D に学習効果が働く場合

ここでは，既存企業の R＆D に学習効果が働く場合を考える。既存企業が R＆D に必要となる費用は(６)で表される。(６)の左辺の c_i は R＆D 効率と関係し，その値が小さいほど一定のハザードレートを得るために掛かる R＆D 費用は小さくなる。前章ではリード段階によらず c_i は一定であるとしたが，ここでは，リード段階が増加するにつれて c_i が減少する場合を考える。これは R＆D に成功することにより R＆D の知識や技術が蓄積され以前より R＆D 効率が上昇する場合である。このような R＆D に学習効果が働く場合において，リード段階と，既存企業のハザードレートおよび期待成長率との関係についてみる。

4.1　リード段階とハザードレート（学習効果あり）

R＆D に学習効果が働く場合，リード段階が増加するにつれて R＆D 効率を表す c_i が減少して行く。まず，v_{i+1} を所与として c_i とハザードレート x_i の関係についてみると(25)より，次の関係が成立することが分かる。(証明は数学注４を参照。)

$$\mathrm{sgn}\left[\frac{\partial x_i}{\partial c_i}\right] = -\mathrm{sgn}\left[v_{i+1} g - \frac{\pi_0}{a}\right] = -1 \tag{32}$$

(32)より，c_i の増加により x_i は減少することが分かる。また，(25)より，

$$\lim_{c_i \to \infty} x_i = 0 \tag{33}$$

となることが分かる。

リード段階とハザードレートの関係をみるために，$i+1$ 段階リードのハザードレート x_{i+1} と i 段階のリードのハザードレート x_i を比較する。R＆D に学習効果の働かない場合では c_i は一定で $c_{i+1}=c_i$ となり，$x_i > x_{i+1}$ であった。いま，v_{i+2}，v_{i+1}，c_{i+1} が所与であり，x_{i+1} が一定であるとする。(32)，(33)でみたように x_i は c_i が増加するにつれて減少して行き，やがてはゼロに近づいて行く。したがって，c_i が十分大きくなれば x_i は十分小さくなり，一定としている x_{i+1} よりも小さくなる。このことより，次のような $\bar{c}_i$ の存在がいえる。

$$\bar{c}_i = \{c_i \mid x_i = x_{i+1},\ c_i > c_{i+1}\}. \tag{34}$$

x_i は c_i の減少関数であるので，c_i と $\bar{c}_i$ の大きさによって，

$$\begin{aligned} c_i < \bar{c}_i &\Longrightarrow x_i > x_{i+1} \\ c_i = \bar{c}_i &\Longrightarrow x_i = x_{i+1} \\ c_i > \bar{c}_i &\Longrightarrow x_i < x_{i+1} \end{aligned} \tag{35}$$

という関係が成立することが分かる。

c_{i+1} を所与として，c_i が c_{i+1} よりも大きくなる場合についてみたが，c_i が c_{i+1} よりも大きいということはリード段階が i 段階から $i+1$ 段階へ増加したとき R＆D 効率が向上する学習効果が働く場合であると解釈できる。このとき，次のことがいえる。

命題 3　R＆D の学習効果が十分大きければ（c_i と比較して，c_{i+1} が十分小さくなる場合），リード段階が増加してもハザードレートは減少しない。

$$x_i \leq x_{i+1}.$$

4.2　リード段階と期待成長率（学習効果あり）

R＆D に学習効果の働かない場合では，既存企業の期待成長率はリードの段

階が増加するにつれて減少した。ここでは，Ｒ＆Ｄに学習効果が働く場合での既存企業の期待成長率について検討する。

既存企業の期待成長率は(30)で表された。ここでも，v_{i+2}，v_{i+1}，c_{i+1} が所与であり，x_{i+1} が一定であるとして分析を行う。まず，v_i と c_i についてみると，次の関係が成立することが分かる。(証明は数学注５を参照。)

$$\mathrm{sgn}\left[\frac{\partial v_i}{\partial c_i}\right]=-\mathrm{sgn}\left[v_i-\frac{\pi_0}{a}\right]=-1 \tag{36}$$

(36)より，c_i の増加により v_i は減少することが分かる。v_i の極限についてみると，(22)より，

$$\lim_{c_i\to\infty} v_i=\frac{\pi_0}{a} \tag{37}$$

となることが分かる。

c_i が増加するにつれて x_i と v_i は共に減少したが，それぞれの極限ついては x_i はゼロとなるが，v_i はゼロとはならず π_0/a である。このことより，

$$\lim_{c_i\to\infty} \mathrm{E}_i=-a+r \tag{38}$$

となることが分かる。

$i+1$ 段階リードの既存企業の期待成長率 E_{i+1} についてみると，

$$\mathrm{E}_{i+1}=x_{i+1}\left(\frac{v_{i+2}g}{v_{i+1}}\right)-a+r \tag{39}$$

である。ここで，v_{i+2}，v_{i+1}，x_{i+1} は一定であるとしているので，(39)の右辺の第一項も c_i の値によらず一定である。したがって，

$$\mathrm{E}_{i+1}>-a+r=\lim_{c_i\to\infty}\mathrm{E}_i \tag{40}$$

という関係が成立する。

(13)より，$a-r=x_i+k_iy$ であり，これは産業全体でのハザードレートであり，リードの段階によらず一定である。命題２でみたようにＲ＆Ｄに学習効果が働かず $c_i=c_{i+1}$ である場合，少なくとも $v_1<\bar{v}$ であるときには E_{i+1} が E_i よりも小さくなった。これに対してＲ＆Ｄに学習効果が働く場合では(40)より，

c_i の大きさによっては E_{i+1} が E_i よりも大きくなることが分かる。R＆Dに学習効果が働き $c_i > c_{i+1}$ となる場合，少なくとも $v_1 < \bar{v}$ の下で次のような $\hat{c}_i$ が存在することになる。

$$\hat{c}_i = \{c_i \mid E_i = E_{i+1},\ c_i > c_{i+1}\}. \tag{41}$$

このことより，次のことがいえる。

命題4　R＆Dの学習効果が働く場合（c_i と比較して，c_{i+1} が小さくなる場合），リード段階が増加しても期待成長率が一定である場合がある。

$$E_{i+1} = E_i. \quad (c_i = \hat{c}_i)$$

既存企業がR＆Dを行う場合ではそのハザードレートが正になるので（4）より，期待利得の割引現在価値について $V(i+1) > V(i)$ となることは明らかである。期待利得の割引現在価値が企業規模を表しているとすると，リード段階の増加は企業規模の拡大をもたらすことになるが，命題4より，企業規模が拡大しても期待成長率は変化しない場合があることが分かった。これは企業規模と成長率は無関係であるとするジブラーの法則と整合的である。したがって，リード段階の増加がR＆D効率の向上をもたらすといったR＆Dに学習効果が働く場合，ジブラーの法則が成立する可能性があることが示された。

5．結　　語

R＆Dに成功するとリード段階が増加してその企業規模が拡大するといった既存企業と参入企業とのR＆D競争においてジブラーの法則が成立するか検討を行った。

まず，R＆Dの成功を重ねてもR＆D効率が変わらないとするR＆Dに学習効果の働かない場合についてみた。このとき，既存企業の期待成長率はリード段階が増加につれて減少して行き，企業規模と期待成長率は負の相関関係を持つことが分かった。

次に，R＆Dの成功を重ねるにつれてR＆D効率が向上して行くという

R＆Dに学習効果が働く場合についてみた。このとき，学習効果の働きが十分大きければリード段階が増加しても期待成長率は一定となる場合があることが分かった。これは学習効果の働かない場合，R＆Dの瞬間的成功確率であるハザードレートがリード段階の増加とともに減少するのに対して，R＆Dに学習効果が働く場合ではリード段階が増加してもハザードレートが減少しないことによるものである。したがって，R＆Dに学習効果の働かない場合ではジブラーの法則は成立しないが，R＆Dに学習効果が働く場合ではジブラーの法則が成立する場合があることが示された。

ここでは，既存企業と参入企業のR＆D競争によって産業全体でみた企業規模の分布がどのようになるかについての分析は行っていない。企業分布についての分析は今後の課題としたい。

数学注１

$$v_i - v_{i+1} > 0 \qquad (*)$$

が成立するかについてみる。$i=m$ のとき，$v_m = \pi_0/a$ より，

$$v_{m-1} - v_m = \sqrt{4(ac_{m-1})^2 + 4\pi_0 c_{m-1} + \left(\frac{\pi_0}{a}g\right)^2} - \left(2ac_{m-1} + \frac{\pi_0}{a}\right)$$

となる。右辺の第一項と第二項をそれぞれ二乗して差をとると，

$$(g^2-1)\left(\frac{\pi_0}{a}\right)^2 > 0$$

であるので $v_{m-1} - v_m > 0$ であることが分かる。したがって，$i=m-1$ のとき(＊)は成立する。(＊)が $i=j$ のとき成立すると仮定して，$i=j-1$ のときも成立するかについてみる。すなわち，$v_j - v_{j+1} > 0$ が成立するとして，$v_{j-1} - v_j > 0$ が成立するか確かめる。

$$v_{j-1} = \sqrt{4(ac_{j-1})^2 + 4\pi_0 c_{j-1} + (v_j g)^2} - 2ac_{j-1}$$

であるが，$v_j > v_{j+1}$ であることより，右辺のルート内の v_j を v_{j+1} で置き換えると

$$\sqrt{4(ac_{j-1})^2 + 4\pi_0 c_{j-1} + (v_j g)^2} - 2ac_{j-1} > \sqrt{4(ac_{j-1})^2 + 4\pi_0 c_{j-1} + (v_{j+1} g)^2} - 2ac_{j-1}$$

が成立する。ここでは，c_i が i によらず一定であるので $c_{j-1} = c_j$ である。不等式の右辺の c_{j-1} を c_i で置き換えても右辺の値は同じであり，

$$\begin{aligned} &\sqrt{4(ac_{j-1})^2 + 4\pi_0 c_{j-1} + (v_{j+1} g)^2} - 2ac_{j-1} \\ &= \sqrt{4(ac_j)^2 + 4\pi_0 c_j + (v_{j+1} g)^2} - 2ac_j = v_j \end{aligned}$$

となるので，

$$v_{j-1}=\sqrt{4(ac_{j-1})^2+4\pi_0 c_{j-1}+(v_j g)^2}-2ac_{j-1}>v_j$$

が成立する。したがって，$i=j-1$ のときも（＊）が成立することが確かめられたので，数学的帰納法により，補題1が成立することが証明された。□

数学注2

$$v_{i+1}g-v_i=(v_{i+1}g+2ac_i)-\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}$$

であり，右辺の第一項と第二項をそれぞれ2乗して引くことにより，

$$(v_{i+1}g+2ac_i)^2-(4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2)=4ac_i\left(v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right)$$

が得られるので

$$\mathrm{sgn}[v_{i+1}g-v_i]=\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]$$

が成立することが分かる。$m=i-1$ とすることより，

$$\mathrm{sgn}[v_m g-v_{m-1}]=\mathrm{sgn}\left[v_m g-\frac{\pi_0}{a}\right]$$

となるが，$v_m=\pi_0/a$ より，

$$\mathrm{sgn}\left[v_m g-\frac{\pi_0}{a}\right]=\mathrm{sgn}\left[(g-1)\frac{\pi_0}{a}\right]=+1$$

であることが分かる。補題1より，

$$v_1>v_2>\cdots>v_{m-1}>v_m=\frac{\pi_0}{a}$$

であるので，

$$v_1 g-\frac{\pi_0}{a}>\cdots>v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}>\cdots>(g-1)\frac{\pi_0}{a}>0$$

という関係が満たされることが分かる。したがって，

$$\mathrm{sgn}[v_{i+1}g-v_i]=\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]=+1$$

であることが分かる。□

数学注3

v_{i+1} の変化か v_i/v_{i+1} に与える影響についてみると，

$$\frac{\partial\left(\dfrac{v_i}{v_{i+1}}\right)}{\partial v_{i+1}}=\frac{v_{i+1}^2 g^2-v_i(v_i+2ac_i)}{v_{i+1}^2(v_i+2ac_i)}=-\frac{2(2\pi_0-v_i a)c_i}{v_{i+1}^2(v_i+2ac_i)}$$

であるので，$2\pi_0-v_i a>0$ であれば，v_{i+1} が減少したとき v_i/v_{i+1} は増加することが分かる。補題1より，リードの段階が増加すれば v_{i+1} は減少することが分かった。したがっ

て，リード段階が増加すれば v_i/v_{i+1} は増加することになる。このことは $(v_i/v_{i+1})>(v_{i-1}/v_i)$ が成立すること意味する。□

数学注４

(17)より，

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_i}=\frac{[(v_{i+1}g)^2+2\pi_0 c_i]-v_{i+1}g\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}}{2c_i^2\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}}$$

が得られる。右辺の分子の第一項と第二項をそれぞれ２乗して，それらの差をとると，

$$[(v_{i+1}g)^2+2\pi_0 c_i]^2-\left[v_{i+1}g\sqrt{4(ac_i)^2+4\pi_0 c_i+(v_{i+1}g)^2}\right]^2$$

$$=-4(ac_i)^2\left(v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right)\left(v_{i+1}g+\frac{\pi_0}{a}\right)$$

となることより，

$$\mathrm{sgn}\left[\frac{\partial x_i}{\partial c_i}\right]=-\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]$$

という関係が得られる。(22)より，右辺の括弧内は，

$$v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}=\sqrt{v_i^2+4ac_iv_i-4\pi_0 c_i}-\frac{\pi_0}{a}$$

となり，その右辺の第一項と第二項をそれぞれ２乗して，それらの差をとると，

$$v_i^2+4ac_iv_i-4\pi_0 c_i-\left(\frac{\pi_0}{a}\right)^2=\left(v_i-\frac{\pi_0}{a}\right)\left(v_i+\frac{\pi_0}{a}+4ac_i\right)$$

となるので，

$$\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]=\mathrm{sgn}\left[v_i-\frac{\pi_0}{a}\right]$$

となることが分かる。(32)より，

$$-\mathrm{sgn}\left[v_i-\frac{\pi_0}{a}\right]=-1$$

であること分かる。したがって，

$$\mathrm{sgn}\left[\frac{\partial x_i}{\partial c_i}\right]=-\mathrm{sgn}\left[v_{i+1}g-\frac{\pi_0}{a}\right]=-\mathrm{sgn}\left[v_i-\frac{\pi_0}{a}\right]=-1$$

という関係が得られる。　□

数学注５

(21)より，

$$\frac{\partial v_i}{\partial c_i}=-\frac{2a\left(v_i-\frac{\pi_0}{a}\right)}{v_i+2ac_i}$$

が得られるので，

$$\mathrm{sgn}\left[\frac{\partial v_i}{\partial c_i}\right]=-\mathrm{sgn}\left[v_i-\frac{\pi_0}{a}\right]$$

であることが分かる。$i=m-1$ のとき，

$$v_{m-1}-\frac{\pi_0}{a}=\sqrt{4(ac_{m-1})^2+4\pi_0 c_{m-1}+\left(\frac{\pi_0}{a}g\right)^2}-\left(2ac_{m-1}+\frac{\pi_0}{a}\right)$$

となり，この符号は補題 1 より正である。したがって，$i=m-1$ のとき，

$$\frac{\partial v_i}{\partial c_i}<0$$

が成立することが分かる。$i=j$ のとき，

$$v_i-\frac{\pi_0}{a}>0 \tag{**}$$

が成立すると仮定して，$i=j-1$ のときについてみる。このとき，$\partial v_j/\partial c_j<0$ となるので，c_j の低下は v_j を増加させることになる。(**)より，

$$\frac{\partial v_i}{\partial v_{i+1}}=\frac{v_i g^2}{v_i+2ac_i}>0$$

が得られることより，v_j の増加は v_{j-1} を増加させることが分かる。学習効果の働かない $c_{j-1}=c_j$ の場合では $v_{j-1}>v_j$ となった。この場合，

$$v_{j-1}-\frac{\pi_0}{a}>v_j-\frac{\pi_0}{a}>0$$

という関係が成立する。いま $c_{j-1}=c_j$ であったとして，c_{j-1} が一定の下で c_j が低下して，$c_{j-1}>c_j$ となったとする。このとき，v_j が増加するので v_{j-1} も増加することになる。増加した v_{j-1} を新しく v'_{j-1} として表すことにする。$v'_{j-1}>v_{j-1}$ であることより，

$$v'_{j-1}-\frac{\pi_0}{a}>v_{j-1}-\frac{\pi_0}{a}>0$$

という関係が成立するので，$i=j-1$ のときも (**) が成立する。したがって，数学的帰納法より $i=1, 2, \cdots, m-1$ で，

$$\frac{\partial v_i}{\partial c_i}<0$$

が成立することが分かる。□

参　考　文　献

Adachi, H.,Nakamura, T. and Osumi, Y., 2015. Studies in medium-run macroeconomics. Word Scientifc.

Acemoglu, U. and Cao, D., 2010. Innovation by entrants and incumbents. Journal of Economic Theory 157, 255-294.

Denicolò, V. and Zanchenttin, P., 2012. Leadership cycle in a quality-ladder model of endogenous growth. The Economic Journal 122, 618-650.

Klette,T. and Kortum,S., 2004. Innovating firms and aggregate innovation. Journal of Political Economy 112, 986-1018.

Segerstrom, P., 2007. Intel economics. International Economic Review 48, 247-280.

Segerstrom, P. and Zolnierek, J., 1999. The R & D incentives of industry leaders. International Economic Review 40, 745-766.

Simon, H.A., 1955. On a class of skew distribution. Biometrica 82, 425-440.