Sraffa 標準システムの「アルゴリズム」について

佐　藤　伸　明

神戸学院経済学論集
第49巻　第３号　抜刷
平成29年12月発行

Sraffa 標準システムの「アルゴリズム」について

佐　藤　伸　明

要　旨

Sraffa の著作の§37は標準システムを見出そうとする仮想実験を示す節である。本稿は，この節における Sraffa のアルゴリズムには不備があるという Lippi 等の問題提起を受けて，同節の内容について動学的収束問題としての定式化を行い，その脈絡で標準システムがもつ特性を明らかにしている。

1．序

Sraffa の『商品の生産』（1960，pp. 19-21）によれば，「標準システム」は現実の経済システムに埋め込まれている。事実，現実のシステムから標準商品ベクトルを見出し，標準システムを構築することは困難ではないことが数値例で示されている。Pasinetti（1977）においても， Sraffa の議論を踏襲する形で，実際のシステムから標準システムが構成されている。

しかし，Sraffa の議論，特に§37[1]における現実のシステムから標準システムへの移行を「仮想実験（imaginary experiment)」により示す議論は,標準システムを見出すアルゴリズムとして不十分であり，追加的な仮定を置かなければ，所望の標準比率や標準商品ベクトルに到達できない可能性があることが，Lippi（2008）や Salvadori（2008）等によって論じられた。この点は，Lippi よりもかなり前に，著作の草稿段階で，数学者の Alister Watson により指摘されていた問題であることが Kurz-Salvadori（2001）において報告されている。同論文では，彼らによるアルゴリズムの定式化も行われている。さらに Salvadori（2011）では，数学者の Besicovitch が Sraffa の著作の草稿段階（1944年）で彼に提供した標準商品の存在証明を所望のアルゴリズムの一つとして検討している。(2)

この小論は，Lippi や Salvadori の議論を題材としつつ，彼らとは異なるアプローチを提示すること，そしてそれに基づいて，現実の経済システムから標準システムへの移行がもつ含意やその脈絡における標準システムの特性を調べることを目的としている。

Lippi や Salvadori の定式化が Perron-Frobenius の定理の一つの証明のような様相を持っているのに対して，我々のアプローチは差分方程式に基づいて動学的安定性の観点から標準システムへの収束に焦点を当てている。

まず，次節では，Sraffa の叙述の我々の理解を示す。その後，Lippi の所論の概略を必要な範囲で批判的に説明し，我々のアプローチへと繋げる。Salvadori 等の議論については関係するところで言及する程度にとどめる。

2．Sraffa の所論

Sraffa の標準商品ないし標準システムの構成の議論は，第 4 章と第 5 章を中心に行われているが，そこに至る前に，既に，標準比率が極大利潤率やバランスを保つ比率に等しい旨の議論がなされている。そして，第 4 章§25の標準商品構成の具体例に議論は進む。そこでは，システムの方程式に乗数をかけて標準システムを求めて，標準比率を求めるという説明が数値例を使って行われている。

次に，§33では，いわゆる q 体系に基づいて，標準商品を構成する問題は，適当な乗数を求めることに帰することが示される。各部門共通の物的剰余率 R を用いて標準システムは次のように表される。(3)

$$(1+R)AQ=Q \qquad (1)$$

$$lQ=1. \qquad (2)$$

ここで，A は a_{ij} を要素とする資本係数行列（$n\times n$）で，a_{ij} は第 j 部門（$j=1,$

$\cdots, n$）の第 i 部門（$i=1, \cdots, n$）からの流動資本の投入係数，l_i＝第 i 部門の労働係数で，$l=\{l_i\}$＝労働係数ベクトル（$1\times n$），各要素は正と仮定される。経済全体の雇用量がこのシステムの雇用量と等しいことが仮定されている。また，Q_i＝第 i 部門の生産量，$Q=\{Q_i\}$＝非負生産量ベクトル（$n\times 1$）。行列 A は分解不能な非負行列で，数値例では正行列が仮定されている。(１)のシステムでは，基礎財のみが考慮され，生産量がゼロとなる部門は削除されているので，$Q>0$ のケースが扱われている。(１)(２)のシステムは（$n+1$）本の式と（$n+1$）個の未知数（Q_i と R）から構成されているので，方程式を解いて，標準商品ベクトルと標準比率が一意的に求まる。Pasinetti（1977）は，「Sraffa によって用いられた方法」として，q 体系から各部門の乗数 q（産出量の拡大率または縮小率）と標準比率を求めても同じ結果（標準比率や標準商品の数値）が得られることを示している。

問題の§37は第５章「標準体系の一意性」（Uniqueness of the Standard System）にある。(１)式の行列式から求まる R の値は n 個あり，それぞれに固有ベクトルが対応するが，そのうちの１個のベクトルのみが標準システムを構成することを示そうとしている。

構成方法すなわちアルゴリズムとみなされる仮想実験は，次の２つのステップの繰り返しである。

①産業の生産量ベクトルの比率を変えて，全産業に剰余が出るようにする。

②少なくとも１産業の剰余がゼロになるまで，全部門の生産量を一律に減少させる（ただし，雇用労働量や生産手段の数量は変えない）。

そして，全産業の剰余がなくなるまで①および②のプロセスを繰り返す。

もとの生産条件は，こうして得られた体系の各産業の生産量を均一の率 R で増加することにより復元することができる，という。

Watson や Lippi 等が問題視するのは，この最初のステップにおいて生産量ベクトルの選択が無数にあり定まっていないので，アルゴリズムとして不備だ

ということである。Lippi や Salvadori は，§37の議論は標準比率や標準商品を見出すためのアルゴリズムであると理解している。数学的にいえば，Perron-Frobenius 根と Perron-Frobenius ベクトルの存在証明に該当するものと理解されている。(4)

しかし，§37が Perron-Frobenius の定理の内容そのものを示すようなアルゴリズムを意図したものかどうか疑問である。ここの脈絡では，Sraffa は標準商品の構成をもっぱら問題にして，標準比率の構成の問題をあまり問題にしていないように見受けられる。Sraffa の記述を見ても，§33では，両者が，方程式体系の解として同時的に求まると記している。§41では，「§37で，正値の q の組み合わせがつねに一つ存在することをみた。」。§43では，「正の q に対応する標準比率 R を求めるだけならば，q 方程式に訴えることなく，生産方程式から賃金率 w をゼロとおくことにより極大利潤率として求まる。」。また，「q 体系の諸方程式は R についての n 次の単一方程式に還元でき」(§38)，「R の最低の値に正の乗数が対応する」(§42)，とも記している。

従って，標準比率や標準商品の存在を前提にして，標準商品への収束を示すことにより標準商品の一意性を明らかにすることが§37の Sraffa の目的であったという理解が可能ではないかと思われる。ただし，本論文では，このような解釈論の訓詁学的正当化にはこれ以上立ち入らないこととし，標準比率や標準商品の存在の知識を前提として，標準システムへの動学的収束問題を考察することにしたい。

3．Lippi の問題提起と証明

3.A　問題提起

Lippi (2008) の論文の標準商品の存在にかかわる部分は，Sraffa の論述が数学的に見て不十分であるという指摘の部分とその不備を克服する本人の証明の部分に分けられる。

まず，前者の問題提起の部分から取り上げよう。各商品の生産量を１とし，

それを u とする。u はその要素がすべて１の $n\times1$ のベクトルである，即ち，$u=(1, 1, \cdots, 1)^T$。上付きの T は，転置を意味する。生産量ベクトルを $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)^T$ と表示する。

1）$q^{(1)}=u$ とおく。添え字の(1)は第１ステップを意味している。$q^{(1)}-Aq^{(1)}>0$ ならば，純生産物のすべての要素が正であるから，この場合には $q^{(1)}=Q^{(1)}$ とおく。そうでない場合，各基礎財は厳密に必要な量よりもより大なる量が生産される。それを $Q^{(1)}$ とおく。係数行列 A は非負分解不能，少なくとも１財の純生産物が正，基礎財がある等の諸仮定から，$q-Aq>0$ をみたす q は存在する。(1)の段階は，前節の構成方法の①に対応する。

2）次に，比率 $\rho_j(1>\rho_j>0)$ をつぎのように設定する。

$$\rho_j=\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k^{(1)}a_{kj}}{Q_j^{(1)}}.$$

この段階の ρ_j のうち最大のものを $\rho^{(1)}$ とする，

$$\rho^{(1)}=\max_j\{\rho_j\}.$$

ここで，生産の仮想上の変更を行い，標準比率を見つけようとする。まず，技術係数 a_{ij} は変更せずに，各産業の生産物を $Q_j^{(1)}$ から $\rho^{(1)}Q_j^{(1)}$ へ減少させる。生産量は $\rho^{(1)}Q^{(1)}$ となり，少なくとも一つの財の純生産物はゼロである。

3）もしすべての財の純生産物がゼロであるならば，標準比率は $(1-\rho^{(1)})/\rho^{(1)}$ である。すべてがゼロでなければ，$q^{(2)}=\rho^{(1)}Q^{(1)}$ とおき，第１ステップに戻り，$Q^{(2)}$ を構築する。そして，第２ステップに行き，$\rho^{(2)}$ を得る。このような手順が h 回繰り返されると，すべての産業に均一に生じる削減率は，$\rho^{(1)}\rho^{(2)}\cdots p^{(h)}$ で与えられる。こうして，所望の標準比率 R について，次式を得る。

$$\lim_{h\to\infty}\prod_{k=1}^{h}\rho^{(k)}=\frac{1}{1+R} \tag{3}$$

ところが，このような所望の結果が得られる可能性とは裏腹に，第１段階にお

ける Q の選択，つまり生産量の構成の選択や ρ の選択によっては，所望の結果には至らず，

$$\lim_{h\to\infty}\prod_{k=1}^{h}\hat{\rho}^{(k)}>\frac{1}{1+R}$$

となるような，$\hat{Q}^{(1)}, \hat{Q}^{(2)}, \cdots,$ 及び $\hat{\rho}^{(1)}, \hat{\rho}^{(2)}, \cdots,$ が存在するかもしれない。（３）式，即ち，標準比率や標準商品ベクトルへの収束が保証されるためには，削減率の選択とともに行れる $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \cdots,$ の選択に関する何らかのルールが必要である。しかし，Sraffa はそのようなルールを提示していない。これが，Lippi の主張である。

3. B　Lippi の証明

Lippi は，生産物および純生産物の生産構造 y を一定に維持しながら，生産手段を均一に増大させて標準システムに至るプロセスを考えている。

$$q-sAq=y \qquad for \quad s\in[1, S)$$

において，$y>0$ を仮定し，生産量も s に対応して決まるので，$q_y(s)$ とおいている。上記をみたす任意の y, s に対して $q_y(s)>0$ である。

$$q_y(s)=y+sAy+s^2A^2y+\cdots$$

であり，$y>0$ の仮定からこれは収束する。しかし，$s\to S$ では，発散する。

次のようなベクトルを考える，

$$\hat{q}_y(s)=\frac{q_y(s)}{lq_y(s)} \qquad \hat{y}(s)=\frac{y}{lq_y(s)} \tag{4}$$

$lq_y(s)$ は $q_y(s)$ だけの生産を行うのに必要な労働量であり，労働係数ベクトル l のすべての要素は正で一定であるが，$lq_y(s)$ は $s\to S$ のとき発散して行く。$\hat{q}_y(s)$ は $l\hat{q}_{y(s)}=1$ という労働制約と次式をみたすベクトルである。

$$\hat{q}_y(s)-sA\hat{q}_y(s)=\hat{y}(s).$$

$\hat{y}(s)$ は労働制約をみたす純生産物である。

ここで，もし $s\to S$ のとき，（３）式が成立するようなアルゴリズムがあれば，

$\lim_{s\to S}\hat{q}_y(s)=Q$ とおくと

$$Q-SAQ=0,\ lQ=1$$

というシステムが得られる。Q は正の固有ベクトルで一意である（スカラー倍を除いて）。Q の一意性を用いて，$\lim_{s\to S}\hat{q}_y(s)=Q$ を示す。

以上が Lippi の証明方針である。彼の提示するアルゴリズムや証明は次のようである。①まず，s を 1 つ決める。②それに応じて，$q_y(s)$ を決める。③少なくとも 1 産業の純生産物がゼロになるまで sA の構成要素を一律増大させる。④ $y(>0)$ の構成を一定に維持し続けるように各段階の生産を決めて行く。ただし，$s\to S$ のとき，生産の極限は y から独立していることが示される。最終的に，（３）式に該当する内容が証明され，同時に標準商品の存在が示されるという主張になっている。

3.C　Critical Assessment

Lippi の議論のうち，§37の解釈としての妥当性にかかわる部分について，後の論考と関係する範囲で所見を 3 点述べよう。

3.C.1　まず，問題提起の部分である。Salvadori（2008）はこの問題提起を Lippi の貢献と考えている。しかし，§37が Lippi の言うようなアルゴリズム，特に標準比率 R を見出すアルゴリズムを示そうとした部分であるのかどうか。

Sraffa の記述を読めば，余剰を削減することにより，全産業でちょうど補填することができるだけのシステムを見出そうとしている。このとき，標準比率 R は 0 である。こうして $R=0$ に対応する標準商品の構成を見出しておいて，生産量を一律（R）拡大すればもとの生産体系に戻ることができる，と考えられている。他方，Lippi では，（３）式に見られるように，R より大きい削減率 ρ を考えて，無限の繰り返しによりそれらの積が標準比率に対応する行列 A の Perron-Frobenius 根 $(1+R)^{-1}$ に収束すると考えている。$R=0$ ならば，（３）式の右辺は 1 である。1 より小さい削減率 ρ を（３）式左辺のように無限に掛けても 1 にはならないので，標準比率 R が正の場合を考えているようである。

R が正でも，Sraffa が関連箇所[5]で示している数値例の0.1や0.15，または0.2を（3）式右辺の R に代入すれば，右辺の値は約0.91，0.87，0.83である。1より小さい数を無限に掛けてこのような数値に収束する数列 $\{\rho^{(i)}\}$ を Sraffa は§37で考えていたのか疑問である。

そもそも，（3）式の意味に該当するような記述を Sraffa は§37において，またそれ以外のところでもしていないのではないか。（3）式で与えられる R は標準比率ではないであろう。

3.C.2　Sraffa の所論では，現実のシステムの雇用量が仮想の標準システムにも持ちこまれ同一の定数として扱われている。それが両システムをつなぐポイントでもある。他方，Lippi は（4）式で示されるベクトルの点列の収束を証明しようとして，全体の雇用量 $lq_y(s)$ が $s \to S$ のとき発散することを利用する。しかし，そのような雇用の拡大は実行可能でないだけでなく，Sraffa の議論の証明に使うのは適切ではないであろう。

3.C.3　Lippi の証明では，s と生産 $q_y(s)$ を決めて，生産手段 sA を増大させるというプロセスが考えられている。彼が問題としている第1段階の生産量ベクトルの選択については，当初の純生産物ベクトルの構造を一定に維持し続けるという仮定を置いている。これはステップの②の段階で少なくとも1産業の剰余がゼロになった後，ステップ①にもどり全産業の剰余を正にするという手順が扱いにくいので置かれた仮定である。このために，まず $y=q-Aq$ を解いて y の構造を求めなければならない。y の構造を固定すると q のそれも一定に維持されるであろう。それ故，その後，上式 $y=q-sAq$ を純生産物と定義して，生産手段 sA を増大させるため，s の S への増大を論じている。

しかし，$s \neq 1$ である限り，$y=q-sAq$ は普通用いられる意味での純生産物ではない。また，何のためか，そしてどのようにするのか不明であるが，生産手段 sA を増大させている。これらにより（3）式が証明されても，Sraffa の§37

のアルゴリズムの定式化として妥当なものなのかどうか疑問である。

3.D　Salvadori

Salvadori は Lippi の問題提起は認めているが，証明部分について何もコメントしていない。彼は自分の論文（2008）では，出発点として

$$x_0 \in \{x > 0 \mid lx = \beta,\ [I - A]x > 0\}$$

をとり，２つの列 $\{x_t\}$, $\{\lambda_t\}$ を考える。ただし，

$$\lambda_t = \lambda(x_{t-1}) = \max_j \frac{e_j A x_{t-1}}{e_j x_{t-1}}.$$

そして，$[\lambda_t I - A]x_{t-1} \geq 0$。$x_t(t > 0)$ は，$x_t > 0$, $lx_t = \beta$, $[\lambda_t I - A]x_t > 0$ をみたす。ゴールは，$[I - (1+R)A]x_\infty = 0$, $(1+R)^{-1} = \lambda_\infty$ となる $x_\infty > 0$, $\lambda_\infty > 0$ が存在することである。証明方針は Perron-Frobenius の定理の証明のようであり，上で Lippi の所論の問題点として述べた事柄は，Salvadori の証明には存在していない。

Salvadori の論文は，$\{x_t\}$, $\{\lambda_t\}$ が所望の x_∞, λ_∞ に収束しない可能性があるとして，うまく収束するための必要条件を求めることを目的としている。ここではこの問題に深入りしない。一言付け加えれば，適切に収束しない例として彼が指摘したケースの行列は，primitive ではない。§37やそこに至る議論においては，システムの非負分解不能性だけでなく，primitivity も暗に前提にされているように筆者には思われる。

４．§37の叙述と定式化

いま出発点として，事後的な次式を考える，

$$\bar{q}(0) = A\bar{q}(0) + \bar{b}(0) \qquad (5)$$

変数の上のバーは事後を意味している。上式の n 次元列ベクトル $\bar{b}(0)$ は，生産量が $\bar{q}(0)$ で，その生産のために要した生産手段 $A\bar{q}(0)$ を控除した残量としての余剰を示している。＜ステップ１＞が行われ，$b(0) > 0$，即ち，各部門

に正の余剰があると仮定する。<ステップ２>によれば，少なくとも１部門の余剰がゼロになるまで，剰余や生産量を減少させる。このとき，生産手段の量や雇用量を変更しない。各部門一定率 $\alpha(1>\alpha>0)$ の割合で減少させるとする。すると，次の段階（時点１）では，

$$q(1)=Aq(0)+\alpha b(0) \tag{6}$$

となる $q(1)$ を生産する生産計画を立てる。生産手段量を変えないで剰余を減らすという条件から，右辺の生産手段量と剰余の削減を実現するための生産が $q(1)$ である。従って，（６）式には，変数にバーをつけていない。

しかし，$q(1)$ の体系的生産のためには $Aq(1)$ の生産手段を要し，その結果，剰余は $b(1)$ となる。即ち，事後的関係式として

$$\bar{q}(1)=A\bar{q}(1)+\bar{b}(1)$$

を得る。

次に，各部門の剰余を正とする<ステップ１>による配分が行われたものと考える。便宜上，同じ記号で表せば，$\bar{b}(1)>0$ である。再び，<ステップ２>が行われるが，同じ削減率 α を仮定して，それを $\alpha b(1)$ で示せば，次の段階（時点２）の計画生産量は

$$q(2)=Aq(1)+\alpha b(1)$$

で示される。このようにして，時点 t の計画生産量は

$$q(t)=Aq(t-1)+\alpha b(t-1) \tag{7}$$

となる。雇用量条件は，$lq(t)=1$ で示される。

以後，以上のプロセスが繰り返され，各部門の剰余がなくなり，

$$q^{*}=Aq^{*}$$

という状態になればゴールであり，q^{*} が所望の標準商品である。「全面的な補填が剰余生産物を少しも残さずに，ちょうど可能になるような程度にまで生産物が減ぜられる点に至るまで」（p. 45）と Sraffa は言っている。さらに，各産業の生産物が同じ割合で切り捨てられたから，各産業の生産数量を均一の率

（R）で増加させることによって，もとの生産条件を復元することができると付言されている。

一方，Lippi や Salvadori は，

$$\lambda(A)q^{*}=Aq^{*} \tag{8}$$

をゴールとして設定している。$\lambda(A)$ や $q^{*}>0$ の一意性は彼らの論文で証明されている。我々も以下では(８)を所望のゴールと考えよう。ただし，次の変形版も使う。$\lambda(A)$ は A の Perron-Frobenius 根（非負最大根）で，$(1+R)^{-1}$ に等しい。従って，(８)式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} q^{*}&=(1+R)Aq^{*} \\ &=Aq^{*}+b^{*} \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，$b^{*}=RAq^{*}$ である。

さて，(５)は事後の関係であるが，(６)は事前的関係である。現実的には，式の各項目で計画値と実現値が相違し，その相違の程度に応じて対応も異なるのが普通であろう。しかし，ここでは，剰余の削減計画は常に実現するものと考えよう。つまり，試行錯誤的調整ではなく，経済理論においてはしばしば仮定されるように，事前の関係がスムースに継続されると考える。さらに，ゴールを(７)ではなく(８)または(９)とすることに伴い，時点 t における計画剰余量は $\alpha(b(t-1)-b^{*})=\alpha B(t-1)$（ただし,$t>1$）と表すほうが適切であろう。そして，生産量についても，$X(t)=q(t)-q^{*}$ とおけば，(７)式は，

$$X(t)=AX(t-1)+\alpha B(t-1) \tag{10}$$

と表すことができる。雇用量条件は，$lX(t)=0$ で示される。ここで，削減率は毎期同じであるとし，$\alpha B(t-1)=\alpha^{t-1}B(0)$ とおくと，(10)式は

$$X(t)=AX(t-1)+\alpha^{t-1}B(0) \tag{11}$$

と書き換えることができる。

結局，以上の想定のもとでは，問題は(11)式に規定される $X(t)$ が $t\to\infty$ のときに０へ収束するかどうかという問題に帰着する。そして，それは削減率 α の大きさとの係数行列 A の固有値半径や固有値の大きさ，および削減率と固

有値の大小関係に依存して決まる。次節では，幾つかのケースに分けて収束問題を考える。

5．標準システムへの収束

5. A　(11)式の $X(t)$ を逐次解法で求めれば，次のようである，

$$X(t)=A^tX(0)+\sum_{j=0}^{t-1}A^{t-j-1}\alpha^jB(0) \quad for \quad t=1, 2, 3, \cdots \tag{12}$$

(12)式の右辺第 1 項は，$1>\lambda(A)$ ならば，$A^t\to 0(t\to\infty)$ であるからゼロに収束する。右辺第 2 項は $\left(\sum_{j=0}^{t-1}\frac{A^j}{\alpha^j}\right)\alpha^{t-1}B(0)$ となる。$t\to\infty$ のとき，$\alpha>\lambda(A)$ ならば Neumann 級数は収束し，その和は $(I-A/\alpha)^{-1}\geq 0$ である。他方，α^t は $1>|\alpha|$ ならば 0 に収束する。

削減プロセスを考えているので，$1>\alpha>0$ である。さらに $\alpha>\lambda(A)$，つまり削減率の下限を A の根 $\lambda(A)$ と仮定するならば，$\lim_{t\to\infty}X(t)=0$，つまり $\lim_{t\to\infty}q(t)=q^*$ となる。

かくして，上記のごとき削減プロセスに従うならば，任意の生産量ベクトルから出発して，標準商品を見出すことができる。極限では(9)式が成り立つので，各部門の剰余と生産手段の比率である物的剰余率が所望の b^* に収束することで標準比率 R が見出されている。そして，雇用量は $lq^*=1$ である。

5. B　(11)式は 1 階の非同次差分方程式である。特殊解は，$\hat{X}(t)=\alpha^tX$ である。ただし，$X=[\alpha I-A]^{-1}B(0)$。係数行列 A が非負で分解不能，$\alpha>\lambda(A)$，および想定より $B(0)>0$ であるから，すべての t について $\hat{X}(t)>0$ である。

(11)式を α^{t-1} で割ると，

$$\alpha\left\{\frac{X(t)}{\alpha^t}\right\}=A\left\{\frac{X(t-1)}{\alpha^{t-1}}\right\}+B(0)$$

これから，定常的関係式 $\alpha X=AX+B(0)$ を控除すれば，

$$\alpha\left\{\frac{X(t)}{\alpha^{t}}-X\right\}=A\left\{\frac{X(t-1)}{\alpha^{t-1}}-X\right\}$$

である。この関係から

$$\left\{\frac{X(t)}{\alpha^{t}}-X\right\}=\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{t-1}\{X(0)-X\}\qquad for\quad t=1,2,3,\cdots$$

が得られる。$t\to\infty$ のとき右辺第１項がゼロに収束するので，左辺もゼロに収束する。従って，(11)式の任意の解 $X(t)$ は $\hat{X}(t)=\alpha^{t}X$ に比率において収束する。これは特殊解が相対安定（relative stability）とよばれる状況である。通常，X の比率は標準商品の比率とは異なるが，$1>\alpha$ により特殊解 $\hat{X}(t)$ 自体が０に収束するので任意の解 $X(t)$ は０に収束する。ついでながら，このことから，剰余を削減するのではなく増大させる（$\alpha>1$）やり方では標準商品を極限において見出すことは一般にできないことが分かる。

5. C　$\alpha=\lambda(A)$ の場合を考える。Sraffa の記述では，$\lambda(A)$ つまり標準比率 R の存在を前提にして，標準商品の一意的構成を問題にしているように理解することもできると思われるので，このようなケースを考えることも無意味とは言えないであろう。このケースでは，行列［$\alpha I-A$］が非負の逆行列を持つとは言えないので，上とは異なるやり方が必要である。(７)式の剰余項 $b(t-1)$ が $\alpha^{t-1}b_0$ から $\lambda(A)^{t-1}b_0$ に置き換わる。標準比率は剰余と生産手段の比率であるから $\lambda(A)^{t-1}b_0=RAq(t)$ が成り立つ。従って，次式を得る，

$$q(t)=(1+R)Aq(t-1)$$

$(1+R)^{-1}=\lambda(A)$ を考慮すれば，

$$q(t)=\left(\frac{A}{\lambda(A)}\right)q(t-1)$$

これより，逐次解法により，

$$q(t)=\left(\frac{A}{\lambda(A)}\right)^{t-1}q(0)\qquad for\quad t=1,2,3,\cdots\tag{13}$$

が得られる。

そして，任意の $q(0)$ に対して，分解不能非負行列 A がある条件を満たせば，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{A}{\lambda(A)}\right)^{t-1}q(0)=cq^* \qquad (14)$$

という関係が成立する(6)。ここで，スカラー c は A の左 Perron-Frobenius ベクトル（p^* で示す）と $q(0)$ との標準内積である。(13)，(14)から，$\alpha=\lambda(A)$ の場合にも，$t\to\infty$ のとき，生産量 $q(t)$ は標準商品 q^* に収束することが分かる。

上述のある条件とは，A が primitive であることで，その必要十分条件は $A^k>0$ となる数 k が存在することである。A の対角要素の少なくとも 1 つが正であれば primitive である(7)。Sraffa は基礎財からなる体系を考えており，数値例などは正行列を考えている。従って，このような脈絡では，A を primitive と考えることは自然であろう。

5. D　最後に，$1>\lambda(A)>\alpha$ の場合を考える(8)。$[\alpha I-A]^{-1}$ は存在するが非負とは限らない。特殊解は正とは限らなくなる。しかし，この場合にも，(11)の差分方程式の解を考えることにより収束過程を考えることはできる。むしろ，この方法が最も一般的であると言える。

係数行列 A が対角化可能で，その固有値を $\lambda_i(i=1, 2, 3\cdots, n)$，それらに属する固有ベクトルを $y^i(i=1, 2, 3\cdots, n)$ で示せば，(11)の差分方程式の解は，

$$y(t)=h_1\lambda_1^t y^1+h_2\lambda_2^t y^2+\cdots+h_n\lambda_n^t y^n+\alpha^t y \qquad for \quad t=1, 2, 3, \cdots \qquad (15)$$

と表すことができる。$h_i(i=1, 2, 3\cdots, n)$ は初期条件によって決まる定数，$\alpha^t y$ は特殊解である。

ここで，$\lambda_1=\lambda(A)$ とする。絶対値最大の単純固有値がこれだけであるとすると，$\lambda_1>|\lambda_i|(i=2, 3, \cdots, n)$, $\lambda_1>\alpha$ であるから，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_j(t)}{\lambda_1^t}=h_1 y_j^1 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

となる。先のケースと同様に，$y(t)$ は Perron-Frobenius ベクトル y^1 に比率において収束する。

６．結び：標準システムの特性

標準システムが定常状態にある経済を対象とするシステムであるとすれば，その背後には何らかの動学システムがある。Sraffa の「仮想実験」は，現実のシステムから定常状態のシステムへの移行であるから，動学方程式に基づけば，一般解の定常解への収束という側面を持つように思われる。

上の如きアプローチを用いた場合，標準システムが構成されるために必要な特性について確認しておこう。標準システムは，剰余の削減プロセスにおいて，削減率と係数行列の Perron-Frobenius 根 $\lambda(A)$ との大小関係にかかわらず，極限において見出される。削減プロセスの収束において，係数行列 A の極限の存在が重要な役割を果たしている。即ち，(15)式において，$\alpha>\lambda(A)$ ならば α が，そして $\alpha\leqq\lambda(A)$ ならば，$\lambda(A)$ が削減プロセスの極限を決める言わば支配根（dominant root）となる。Perron-Frobenius 根や標準商品ベクトルの一意性や正値性は，システムを構成する係数行列 A の非負性や分解不能性，あるいはすべての財が基礎財という諸仮定から派生し，プロセスの収束性や行列 A の安定性（primitivity）に直接規定される性質ではない。Sraffa の§37が標準商品や標準比率の一意性や正値性を収束アルゴリズムで示すことを目的とする節であるとするならば，もともと，目的と内容に整合性に欠けるところがあるということになろう。

本稿では，むしろ，標準システムの存在や一意性等を前提にして，現実のシステムからそのシステムへ至るプロセスを記述するものとして§37を理解している。剰余を削減し，標準システムを見出すプロセスは，形式的に見れば，剰余項が存在する非同次システムが同次システムへ，しかも特殊な同次システムへと変換されるプロセスである。線形代数の表現を借りれば，当初の剰余ベクトル $b(0)$ が属する n 次元空間（A の n 個の列ベクトルが張る固有空間）が支

配根に対応する Perron-Frobenius ベクトルの張る固有空間へと変換されるプロセスである。複雑な相互依存に基づく現実の経済システムを簡単化しようとするプロセスであるとも言えよう。

注

（1） Sraffa 自身は各セクションに小見出しをつけていないが，邦訳では小見出しがついている。§37の小見出しは，「標準体系への変形は常に可能である」となっている。

（2） Sraffa のアルゴリズムが不十分であることは，Sraffaの書物の草稿の段階で，数学者 Alister Watson によって指摘されていたという。また，Besicovitch による数学の証明を Sraffa は受け取っていたが，Sraffa は非数学的読者のために§37のような叙述を選好したのであろうと Salvadori は推測している。本稿では，Besicovitch の証明は取り上げない。なお，Sraffa と彼に協力した数学者との交流関係は，Kurz, H. D and Salvadori, N.（2001），Kurz, H. D and Salvadori, N.（2004），Kurz, H. D and Salvadori, N.（2008），および Salvadori, N.（2011）の一連の論文で取り上げられている。

（3） 物的剰余率やこれらの式については，Pasinetti（1977, pp. 92-103）を参照。

（4） Kurz, H. D and Salvadori, N.（2001）では，§37のアルゴリズムが定式化されているが，Salvadori, N.（2008）の定式化と同様である。後者は，前論文の発展である。

（5） Sraffa（1960），p. 29, p. 20。

（6） $(A/\lambda(A))^t$ が収束するとき，極限行列のすべての列は A の Perron-Frobenius ベクトルからなる。極限行列の rank は 1 である。Nikaido（1968, p.110）Theorem 8. 1 を参照。この極限行列は A が対角化可能であるとき，A をスペクトル分解しても求めることができる。つまり，$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i G_i$（ここで，$\lambda_i$ は A の固有値で，G_i は対応する射影子 projector）において，$\lambda(A)$ に対応する射影子がそれである。

（7） primitivity や相対安定，および Perron-Frobenius の定理等については，Nikaido（1968, Chap II）が詳しい。

（8） $\lambda(A)>1>\alpha$ のケースもこのケースと同様である。

参 考 文 献

Kurz, H. D. and Salvadori, N. (2001) ‘Sraffa and the Mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson’, in T. Cozzi and R. Marchionatti (eds), *Piero Sraffa’s Political Economy. A Centenary Estimate,* London and New York: Routledge, pp. 254-84.

Kurz, H. D. and Salvadori, N.（2004）‘On the collaboration between Sraffa and Besicovitch : the cases of fixed capital and non-basics in joint production’, in *Piero Sraffa,* Rome: Academia Nazionale dei Lincei, pp. 255–301. Reprinted in Kurz, H. D. and Salvadori, N.（2007）*Interpreting Classical Economics,* London and New York: Routledge, pp. 159–200.

Kurz, H. D. and Salvadori, N.（2008）‘On the collaboration between Sraffa and Besicovitch: the “Proof of Gradient”’, in G. Chiodi and L. Ditta（eds）*Sraffa or an Alternative Economics,* Houdmills: Palgrave Macmillan, pp. 260–74.

Lippi, M.（2008）‘Some observations on Sraffa and mathematical proofs’, in G. Chiodi and L. Ditta（eds）*Sraffa or an Alternative Economics,* Houdmills: Palgrave Macmillan, pp. 243–52.

Nikaido, H.（1968）*Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press.

Pasinetti, L. L.（1977）*Lectures on the Theory of Production,* Columbia University Press, New York. 菱山泉，山下・山谷・瀬地山共訳『生産理論』東洋経済新報社，1979年.

Salvadori, N.（2008）‘On a proof of Sraffa’s’, in G. Chiodi and L. Ditta（eds）*Sraffa or an Alternative Economics,* Houdmills: Palgrave Macmillan, pp. 253–9.

Salvadori, N.（2011）‘Besicovitch, Sraffa and the existence of the Standard Commodity’, in Salvadori, N. and C. Gehrke（eds）*Keynes, Sraffa, and the Criticism of Neoclassical Theory,* Routledge, pp. 113–31.

Sraffa, P.（1960）*Production of Commodities by Means of Commodities,* Cambridge: Cambridge University Press. 菱山泉・山下博共訳『商品による商品の生産』有斐閣，1962年.