直線市場の競合する3施設の配置問題

塩　出　省　吾

概　要

本論文では，先行する研究([10])で議論された互いに競合関係にある3施設の配置問題を拡張する。その論文では，著者は直線市場に既に1施設が配置されており，そこに既存の施設とは競合し，さらにそれぞれ互いに競合関係にある2つの施設を配置する問題を考えた。本論文でも，新たに配置する2番目の施設の配置問題（セントロイド問題）および3番目の施設の配置問題（メディアノイド問題）を考える。これらの問題はHakimi（[4])の研究以降いくつか研究がなされており([7-12])，一般的には難しい問題であるがナッシュ均衡解を求めるモデルとは異なり，均衡解は必ず存在することが保障される。しかし，解の存在が保障されても，解を求めることは一般的には非常に難しく，先行の論文([10])では，特に需要が一様分布すると仮定した場合について詳細に解析した。本論文では，さらに一般の連続型分布に拡張して議論する。一般の分布では場合分けも増え，簡単な結果が与えられないが現実の問題により近づけるものとしては価値があるであろう。

1. はじめに

Hotellingの先行的研究([5])から始まった競合配置に関する研究は数多く存在するが，新たに市場に参入する複数の競合施設の配置問題を考えるときに，既に配置されている競合関係にある施設を考慮した研究は少ない。塩出([10])は，既に1つの施設が直線市場に存在し，その市場全体の需要を独占している場合に，新たに2つの施設が同じ市場に参入する場合を考えている。これら3つの施設はそれぞれ互いに競合しており非協力であると仮定している。また，新たに参入する2施設の配置は同時に行われるのではなく，配置に時間的な順

序があるとしている。最初の施設の配置に関しては後から配置される施設のことを考慮しなければならないので，セントロイド問題になるのである([4])。後から配置される施設は既に配置されている２つの施設の配置を見て，自分が有利になるように施設を配置すれば良いのでメディアノイド問題として考えれば良いとしている。先の論文では，需要は一様分布を考えたが，現実問題に近づけるためには，より一般的な分布を考える必要がある。そこで本論文では，一般的な連続型分布に関してメディアノイド問題とセントロイド問題の解を解析しそれぞれの最適解を導く。

2．モデルの定式化と解析

この論文では直線市場を考える。この市場には既存の施設Ａがあり，その施設の位置をとする。当初はこの市場には施設Ａしかないので，この施設が市場全体を独占している。いまこの市場に，施設Ａと競合する２施設Ｂ，Ｃが新たに市場に参入する場合を考える。ここで新たに参入する２施設Ｂ，Ｃも互いに競合すると仮定する。この市場には３つの施設Ａ，Ｂ，Ｃが存在することになるので，施設の利用者は自分に最も近い施設を利用すると仮定する。新たに参入する２つの施設Ｂ，Ｃはこの順に市場に参入し，先に配置された施設と同じ位置には配置できないとする。先に市場に参入する施設Ｂは，既に配置されている施設Ａと後から配置される施設Ｃが最適に配置することを考慮して配置されなければならない。この種の施設配置問題はセントロイド問題（シュタッケルベルグ均衡問題）であり，自分の配置に対して後から最適に配置される施設Ｃの配置を考慮して施設の最適配置を決めなければならない。また，既に述べたように後から配置される施設Ｃは，そのとき既に配置されている施設Ａ，Ｂの位置を知った上で自ら獲得する需要量が最大になるように施設を配置する。この種の問題はメディアノイド問題であり，セントロイド問題と比べると比較的容易に解くことができる。施設Ｂの配置問題に戻ると，後から配置される施設Ｃがメディアノイド問題に関して最適に配置するということを考えて施設の

最適配置方策を決定しなければならない。

最初にメディアノイド問題を考える。配置の順番としては後になるが，セントロイド問題を考えるときには必ずメディアノイド問題の解を考慮しなければならないので先に考えておく必要がある。直線市場において需要量が位置 x に対して連続的に分布していると仮定し，その分布している需要量の密度関数を $f(x)$ とする。さらに，次の積分 $F(x)$ も定義する。

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

このとき，$F(x)$ は位置 x より左にある（座標が小さい）部分の領域の需要量を表すことがわかる。そこで，新しく参入する施設B，Cの位置をそれぞれ b, c とすると，施設Cの最適配置については，施設A，Bの配置によって異なることがわかる。

2．1　施設Cの最適配置について（メディアノイド問題）

施設A，Bがそれぞれ a, b に配置されているとき施設Cが獲得する需要量を $G_C(a, b, c)$ とする。これを求めるために，まず施設A，Bの配置で場合分けを行う。ここでは $a<b$ の場合についてのみ考える。$a>b$ の場合に関しては施設Cが配置するときにはA，Bが既に配置されており，この場合A，Bの配置順序は全く関係ないので記号を入れ替えるだけで $a<b$ の場合と同様に考えられる。

$a<b$ の場合はCの配置としては a, b で区切られた3つの領域

① $c<a$ の場合

② $a<c<b$ の場合

③ $b<c$ の場合

に分けて考えれば良いことがわかる。

直線市場の競合する3施設の配置問題

① $c<a$ の場合

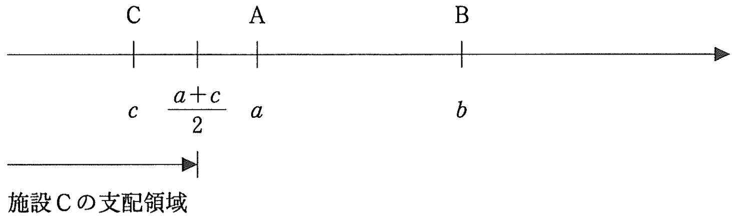

図1．$c<a$ の場合

この場合は施設Cの獲得する需要量は $G_C(a, b, c)=F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ で c に関して単調増加であることがわかる。それゆえCはAに隣接する位置 a^- に配置することがこの領域内では最大の需要量 $G_C(a, b, a^-)=F(a)$ を獲得することがわかる。

② $a<c<b$ の場合

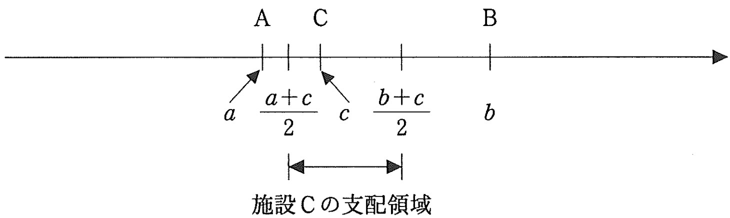

図2．$a<c<b$ の場合

この場合は施設Cの支配領域は対しては図2のように表され，施設Cの獲得する需要量は $G_C(a, b, c)=F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ で与えられる。この領域における極大値は最大値の候補となる。すなわち，極大値は存在するなら $\frac{\partial G_C(a, b, c)}{\partial c}=0$ かつ $\frac{\partial^2 G(a, b, c)}{\partial c^2}<0$ が成り立つときであり，このとき $f\left(\frac{b+c}{2}\right)=f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ となる。この領域の境界に関しては施設CがAに右から

隣接する位置 a^+ に配置する場合とＢに左から隣接する位置 b^- に配置する場合があり，それぞれ $G_C(a, b, a^+)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F(a)$ および $G_C(a, b, b^-)=F(b)-F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ となり，どちらも施設Ｃの最適配置の候補として考慮しなければならない。

③　$b<c$ の場合

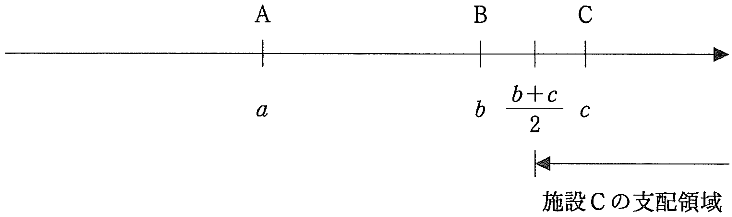

図３．$b<c$ の場合

この場合も施設Ｃの支配する領域は図３のように与えられ，その獲得する需要量は $G_C(a, b, c)=W-F\left(\frac{b+c}{2}\right)$ で c に関して単調減少であることがわかる。（ここで W は全需要量である。）それゆえ，この領域で施設Ｃの最適配置はＢに隣接する位置 b^+ に配置することである。このときＣは需要量 $G_C(a, b, b^+)=W-F(b)$ を獲得することがわかる。

これら３つの場合をまとめると，施設Ｃの最適配置の候補点は結果として

a^-, a^+, b^-, b^+ および (a, b) 内の極大値を与える点

に限定されることがわかる。

2．2　施設Ｂの最適配置について（セントロイド問題）

次に施設Ｂを最適に配置する問題を考える。施設Ｂを配置するときには施設Ａはすでに配置されており，後から施設ＣがＡ，Ｂの配置を考慮して最適に配置することを考慮しなければならない。ここでＣの配置のときと同様にＡ，Ｃ

の配置 a, c に対するBの配置 b のときの獲得需要量を $G_B(a, b, c)$ とする。ここでA，Bの位置について $a<b$ と $a>b$ の2つの場合を考える。

（1）$a<b$ の場合

Bの最適配置には後から配置される施設Cの位置に影響されるのでBの位置によってCの獲得需要量がどのように変化するのかを調べる。施設Cの最適配置を求めるときに述べたように，Cの最適配置の候補はA，Bの位置で区切られた領域によって異なる。これらの中で特に $a<c<b$（または $b<c<a$）の領域では両端を除き $f\left(\frac{b+c}{2}\right)=f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ の条件を満たすような位置 c のときの獲得需要量 $G_C(a, b, c)=F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ を最大値の比較に用いるのであるが，このままでははっきりとした数値として与えられないので，最大値比較のために有効なこの区間における最大獲得需要量 $G_C(a, b, c(b))=\sup_{a<c<b}\left\{F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)\right\}$ に関する性質を述べておく。

<u>性質1.</u>　$a<b$ のとき $G_C(a, b, c(b))$ は b に関して単調増加である。

<u>証明</u>　$b_1<b_2$ とする。いま $c_1=c(b_1)$，$c_2=c(b_2)$ とする。$a<b$ のとき

$$\begin{aligned}
G_C(a, b_1, c_1)&=F\left(\frac{b_1+c_1}{2}\right)-F\left(\frac{a+c_1}{2}\right)\\
&\leq F\left(\frac{b_2+c_1}{2}\right)-F\left(\frac{a+c_1}{2}\right)\\
&=G_C(a, b_2, c_1)\\
&\leq G_C(a, b_2, c_2)
\end{aligned}$$

となり，$G_C(a, b, c(b))$ は b に関して単調増加であることがわかる。

（2）$a>b$ の場合

この場合も $a<b$ のときと同様に考える。区間 $b<c<a$ における施設Cが

獲得する最大需要量は $G_C(a,\,b,\,c(b))=\sup\limits_{b<c<a}\left\{F\left(\dfrac{a+c}{2}\right)-F\left(\dfrac{b+c}{2}\right)\right\}$ となり同様に次の性質2が成り立つ。

<u>性質2.</u>　$a>b$ のとき $G_C(a,\,b,\,c(b))$ は b に関して単調減少である。

（3）施設Aの配置に関する分析

Cが候補点のどこに配置するかは獲得する需要量の比較で決まる。

$a<b$ の場合，領域 $c<a$ におけるCの最大獲得需要量は $F(a)$ で明らかに a に関しては単調増加するが b に関しては変化しない。領域 $a<c<b$ におけるCの最大獲得需要量 $G_C(a,\,b,\,c(b))$ は a に関しては単調減少するが b に関しては単調増加である。領域 $b<c$ におけるCの最大獲得需要量 $W-F(b)$ は a に関しては一定で b に関しては $W-F(a)$ から単調減少である。これらを a に関してのみ考えると，a が増加するにつれて $F(a)$ は0から W まで増加し，$G_C(a,\,b,\,c(b))$ は単調減少するが最大でも $W-F(a)$ を超えない。また，$W-F(b)$ は a に関して変化しない。

$a>b$ の場合は全く対称的であるので同様に考えれば良い。

Ⅰ．$F(a)\leq\min\{W-F(b),\,G_C(a,\,b,\,c(b))\}$ のとき

このとき施設Cは施設Aの左側に配置することはない。すなわち $a<c$ である。方程式

$$W-F(b)=G_C(a,\,b,\,c(b))$$

を満たす b を $b(a)$ とすると，施設Cは $b<b(a)$ のときは施設Bの右側に隣接した位置 b^+ に配置し，$b>b(a)$ のときは区間 $(a,\,b)$ 内の最適な位置 $c(b)$ に配置する。$b=b(a)$ のときはCはBの右側に隣接した位置 b^+ または区間 $(a,\,b)$ 内の最適な位置 $c(b(a))$ に配置する。

Ⅱ．$W-F(b(a))<F(a)\leq\max\limits_{a<b<c}\{G_C(a,\,b,\,c(b))\}$ のとき

このときは施設Bの位置により施設Cの配置は決まる。いま $F(a)=W-F(b)$ となる b を $b_1(a)$ とする。また，$F(a)=G_C(a,\,b,\,c(b))$ となる b を

$b_2(a)$ とする。このとき，$a<b<b_1(a)$ なら施設Cは施設Bの右側に隣接した位置 b^+ に配置し，$b_1(a)<b<b_2(a)$ なら施設Cは施設Aの左側に隣接した位置 a^- に配置し，$b_2(a)<b$ なら区間 (a, b) 内の最適な位置 $c(b)$ に配置する。また，$b=b_1(a)$ ならCはAの左側に隣接した位置 a^- でもBの右側に隣接した位置 b^+ でも同じ需要量になる。さらに $b=b_2(a)$ ならCはAの左側に隣接した位置 a^- でも区間 (a, b) 内の最適な位置 $c(b_2(a))$ でも同じ需要量を獲得する。

Ⅲ. $\max\limits_{a<b<c}\{G_C(a, b, c(b))\}<F(a)\leq W-F(a)$ のとき

Ⅱと同様に $b_1(a)$ を定義すると，$a<b<b_1(a)$ なら施設Cは施設Bの右側に隣接した位置 b^+ に配置し，$b_1(a)<b$ なら施設Cは施設Aの左側に隣接した位置 a^- に配置する。また，$b=b_1(a)$ ならCはAの左側に隣接した位置 a^- でもBの右側に隣接した位置 b^+ でも同じ需要量を獲得する。

Ⅳ. $F(a)>W-F(a)$ のとき

このときは明らかに施設Cは施設Aの左側に隣接した位置 a^- に配置する。

（4）施設Bの獲得需要量と最適配置について

$a<b$ の場合には，施設Aの配置に関する解析より次のことがわかる。

Ⅰ. $F(a)\leq\min\{W-F(b), G_C(a, b, c(b))\}$ のとき

$a<b<b(a)$ なら施設Cは施設Bの右側に隣接した位置 b^+ に配置する。このとき施設B獲得量は $F(b)-F((a+b)/2)$ になり，この値は b に関して単調増加する。$b>b(a)$ ならAの獲得需要量は $F(a)$ と確定しており，Cの獲得需要量は b に関して単調増加することがわかっているのでBの獲得需要量は b に関して単調減少する。$b=b(a)$ のとき，CはBの右側に隣接した位置 $b(a)^+$ または区間 $(a, b(a))$ 内の最適な位置 $c(b(a))$ に配置するが，どちらを選んでもCの獲得需要量は同じであるが，Bの需要量は $c=b(a)^+$ に対しては $F(b(a))-F((a+b(a))/2)$ を獲得するが，$c=c(b(a))$ に対しては $W-F((b(a)+c(b(a)))/2)$ を獲得し $W-F((b(a)+c(b(a)))/2)$ の方が多いこ

とがわかる。それゆえこの場合のＢの最適配置は $b=b(a)^+$ であることがわかる。

Ⅱ．$W-F(b(a))<F(a)\leq\max_{a<b<c}\{G_C(a, b, c(b))\}$ のとき

$a<b<b_1(a)$ ならＣはＢの右側に隣接した位置 b^+ に配置するので，上と同様にＢ獲得量は $F(b)-F((a+b)/2)$ となり b に関して単調増加である。$b_1(a)<b<b_2(a)$ ならＣはＡの左側に隣接した位置 a^- に配置するのでＢは需要量 $W-F((a+b)/2)$ を獲得する。この値は b に関して単調減少する。$b_2(a)<b$ ならＣは区間 $[a, b]$ 内の最適な位置に配置するが，このときのＢの獲得量は b の増加とともに明らかに減少する。そこで $b=b_1(a)$ の場合を考える。このときＣはＡの左側に隣接した位置 a^- でもＢの右側に隣接した位置 b^+ でも同じ需要量を獲得するので，Ｃとしてはどちらでも構わないのであるが，Ｂとしては Ｃが位置 a^- に配置する方がより多くの需要量 $W-F((a+b_1(a))/2)$ を獲得することになる。それゆえこの場合のＢの最適配置は $b=b_1(a)^+$ であることがわかる。

Ⅲ．$\max_{a<b<c}\{G_C(a, b, c(b))\}<F(a)\leq W-F(a)$ のとき

この場合はⅡと同様なので，Ｂの最適配置は $b=b_1(a)^+$ で獲得需要量は $W-F((a+b_1(a))/2)$ である。

Ⅳ．$F(a)>W-F(a)$ のとき

ＣはＡの左側に隣接した位置 a^- に配置するのでＢの獲得需要量は $W-F((a+b)/2)$ となり b の増加とともに減少する。それゆえＢはＡの右側に隣接した位置 a^+ に配置するのが最適である。このときの獲得需要量は $W-F(a)$ である。

以上の結果をまとめると次の表１のようになる。

$b<a$ の場合も $a<b$ の場合と同様に扱うことができる。この場合はＣの配置には同様にして

① $c<b$ の場合　② $b<c<a$ の場合　③ $a<c$ の場合

表1．Bの最適方策と獲得する需要量（$a<b$ の場合）

Aの施設の位置	Bの最適な施設配置	Bの獲得する需要量（W_B）
$F(a)\leq W-F(b(a))$	$b=b(a)^+$	$W-F\left(\dfrac{b(a)+c(b(a))}{2}\right)$
$W-F(b(a))<F(a)\leq W-F(a)$	$b=b_1(a)^+$	$W-F\left(\dfrac{a+b_1(a)}{2}\right)$
$F(a)>W-F(a)$	$b=a^+$	$W-F(a)$

に分けて考えれば良い。

① $c<b$ の場合

Cは b^- に配置し，最大の需要量 $F(b)$ を獲得する。$F(b)$ は a に関しては一定で，b に関しては a^- に至るまで，すなわち $F(a)$ まで単調に増加する。

② $b<c<a$ の場合

Cは区間 $[b, a]$ 内で $\bar{G}_C(a, b, c)=F\left(\dfrac{a+c}{2}\right)-F\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$ を最大にする位置に配置する。この区間内で $\bar{G}_C(a, b, c)$ を最大にする c を $\bar{c}(b)$ とする。$\bar{G}_C(a, b, \bar{c}(b))$ は b に関して単調に減少し，その最大値は $F(a)$ を超えない。

③ $a<c$ の場合

Cは a^+ に配置し，最大の需要量 $W-F(a)$ を獲得する。この量 $W-F(a)$ は a に関しては単調に減少するが，b に関しては一定である。

次に，Aの施設の位置に関する解析を行う。$a<b$ の場合と同様に候補となる3つの獲得需要量値$F(b)$，$\bar{G}_C(a, b, \bar{c}(b))$，$W-F(a)$を比較する。いま方程式 $F(b)=\bar{G}_C(a, b, \bar{c}(b))$ を満たす b を $\bar{b}(a)$ とする。a が小さいとき，すなわち $W-F(a)>F(a)$ のときはCは a^+ に配置するのでBは a^- に配置し需要量 $F(a)$ を獲得する。$F(\bar{b}(a))<W-F(a)\leq F(a)$ のときは，$W-F(a)=F(b)$ となる b を $\bar{b}_1(a)$ とすると，Bは $b=\bar{b}_1(a)^-$ に配置すると最大需要量 $F((a+\bar{b}_1(a))/2)$ を獲得する。このときCは $W-F(a)$ を獲得する。次に $W-F(a)\leq F(\bar{b}(a))$ のときはBは $b=\bar{b}(a)^-$ に配置し最大需要量 $F((\bar{b}(a)$

表2．Bの最適方策と獲得する需要量（$b<a$ の場合）

Aの施設の位置	Bの最適な施設配置	Bの獲得する需要量（W_B）
$W-F(a)>F(a)$	$b=a^-$	$F(a)$
$F(\bar{b}(a))<W-F(a)\leq F(a)$	$b=\bar{b}_1(a)^-$	$F\left(\dfrac{a+\bar{b}_1(a)}{2}\right)$
$W-F(a)\leq W(\bar{b}(a))$	$b=\bar{b}(a)^-$	$F\left(\dfrac{\bar{b}(a)+\bar{c}(\bar{b}(a))}{2}\right)$

$+\bar{c}(\bar{b}(a)))/2)$ を獲得する。

これより表2が得られる。

表1と表2を総合すると，

$$F(a)\leq W-F(b(a))<W-F\left(\frac{b(a)+c(b(a))}{2}\right)$$

および

$$W-F(a)\leq F(\bar{b}(a))<F\left(\frac{\bar{b}(a)+\bar{c}(\bar{b}(a))}{2}\right)$$

より，Bの最適方策については次の表3のようになる。

表3．Bの最適方策と獲得する需要量

Aの施設の位置	Bの最適な施設配置	Bの獲得する需要量（W_B）
$F(a)\leq W-F(b(a))$	$b=b(a)^+$	$W-F\left(\dfrac{b(a)+c(b(a))}{2}\right)$
$W-F(b(a))<F(a)\leq W-F\left(\dfrac{a+b_1(a)}{2}\right)$	$b=b_1(a)^+$	$W-F\left(\dfrac{a+b_1(a)}{2}\right)$
$W-F\left(\dfrac{a+b_1(a)}{2}\right)<F(a)<\dfrac{W}{2}$	$b=a^-$	$F(a)$
$\dfrac{W}{2}<F(a)\leq W-F\left(\dfrac{a+\bar{b}_1(a)}{2}\right)$	$b=a^+$	$W-F(a)$
$\dfrac{W}{2}<F(a)\leq W-F\ (\bar{b}(a))$	$b=\bar{b}_1(a)^-$	$F\left(\dfrac{a+\bar{b}_1(a)}{2}\right)$
$W-F\ (\bar{b}(a))\leq F(a)$	$b=\bar{b}(a)^-$	$F\left(\dfrac{\bar{b}(a)+\bar{c}(\bar{b}(a))}{2}\right)$

4．おわりに

本論文では直線上の競合する3施設の配置問題を考えた。ここでは，施設の配置には順序があり，最初の施設の配置が与えられた市場において，2番目の施設と3番目の施設の配置を考えた。前の論文では需要が一様に分布している場合について考えたが，本論文では一般の連続型分布を考え，場合分けが複雑にはなるが一様の場合を拡張すれば最適配置方策を求めることができた。2次元の場合については一層複雑な場合分けが必要になり，一般の分布では難しいと思われる。

参考文献

[1] Drezner, T.; Drezner, Z.; Shiode, S. (2002) A Threshold Satisfying Competitive Location Model. *Journal of Regional Science* 42 : 287-299.

[2] Drezner, Z. (1982) Competitive Location Strategies for Two Facilities. *Regional Science and Urban Economics* 12: 485-493.

[3] Drezner Z., and S. Shiode, A Distribution Map for the One-Median Location Problem on a Network, *European Journal of Operational Research* (2007) 179, 1266-1273.

[4] Hakimi, S. L. (1983) On Locating New Facilities in a Competitive Environment. *European Journal of Operational Research* 12: 29-35.

[5] Hotelling, H. (1929) Stability in Competition. *Economic Journal* 39: 41-57.

[6] Karkazis J. (1989). Facility Location in a Competitive Environment: A Promethee Based Multiple Criteria Analysis. *European Journal of Operational Research* 42: 294-304.

[7] Osumi, S.; Shiode, S; Teraoka, Y.; Ishii, H. (1998) A Competitive Location Problem with Establishing Cost. *Mathematica Japonica* 48: 19-26.

[8] 塩出省吾 (1997) 確率的制約条件の下での競合する2施設の配置問題，神戸学院経済学論集，第29巻第1・2号，27-36.

[9] 塩出省吾 (2000) 不確実下の2段階競合施設配置問題，神戸学院経済学論集，第32巻第1・2号, 87-96.

[10] 塩出省吾，競合する3施設の配置問題――需要が一様に分布している場合――，神戸学院経済学論集，第35巻第1・2号 (2003) 45-58.

[11] Shiode, S.; Drezner, Z. (2003) A Competitive Facility Location Problem with

Stochastic Weights. *European Journal of Operational Research* 149: 47-52.
[12] Shiode, S.; Ishii, H. (1995) A (k/Am) Medianoid Problem under Competitive Environment. *Mathematica Japonica* 41. 239-244.