選択主体のアクセシビリティを考慮した競合環境におけるファジィ確率施設配置問題

——アクセシビリティを考慮したファジィ確率施設配置——

奥原浩之
葉光毅
夏皓清
石井博昭

1．はじめに

都市計画の目的は円滑な都市活動を確保し良好な都市環境を保持することである。そのため，土地利用や交通等の現状及び将来の見通しなどを勘案して適切な規模で適切な位置に都市施設を配置することが重要である。本研究では，適切な規模の施設を適切な位置に配置するため，数理的立場から施設配置問題についての考察を行う。施設配置問題では，単一または複数の施設配置を決定する意思決定者が単独または複数おり，複数の意思決定者の場合には協調や競合が生じる。また，考慮すべき基準が一つの場合や複数の場合があり，これらの組み合わせによって多様なモデルが考えられる。本研究では新規に参入する事業者がマーケットシェアを最大とするような施設配置を考える。つまり競合する環境で単独の意思決定者が一つの基準に基づいて複数の施設を配置するモデルである。そのうえで，目的係数と制約係数がファジィランダム変数であるようなファジィ確率施設配置問題を定式化してその解法を示す。

従来の都市計画の研究には，小売りの商圏に関するモデルがある。これは小売り重力の法則として知られている。小売り商圏モデルは複数地点の間の相互作用を表現できるように拡張され，空間相互作用モデルと呼ばれる。また，エントロピー最大化の概念により，減衰関数に負の指数分布を用いるエントロピー最大化モデル[1]も導出されている。

従来の施設配置の研究には，意思決定者が単独である場合に，ある施設までの各需要点からの移動費用の総和を最小化する最小和問題による定式化[2]や，移動費用の関数の最大値を最小化するミニマックス問題[3]による定式化がある。また，必要であるが好ましくない施設に対してはマックスミニ問題としての定式化がある。

意思決定者が複数で競合の関係にある場合には，需要点が線分上に一様に分布することを仮定して，二名の競合する意思決定者がそれぞれ，より多くの需要を獲得するべく施設を線分上に配置するモデルが提案されている[4]。また，有限個の需要点を結んだネットワークを仮定して，二名の意思決定者がそれぞれ先手，後手として，より多くの需要を獲得するべく施設をノード上に配置するモデル[5]が提案されている。さらに需要点が平面上に分布し任意の点に施設を配置できるモデルや距離以外に施設の質的レベルに対する選好や，効用[6]を考慮するモデルがある。

本研究では，空間相互作用モデルで考慮されているアクセシビリティの概念を施設配置問題へ取り入れて，アクセシビリティがファジィランダム変数となる場合のファジィ確率計画による施設配置問題の定式化を行い，整数計画問題として解けることを示す。

2．エントロピー最大化モデルでのアクセシビリティ

ここで，アクセシビリティについて説明する。利用者が起点とするゾーンから施設がある終点のゾーンへのアクセスを集計したものを Origin-Destination (OD) 行列という。OD 行列の各要素には起点 o_i と終点 d_j をペアとした相互作

用 $r_{o_id_j}$ が示される。相互作用として交通モデルでは分布交通量，小売りモデルでは購買額などが考えられる。相互作用を行について足し合わせたものを V_i, 列について足し合わせたものを U_j, すべての和を T で表す。このとき，エントロピー最大化モデルは以下のように与えられる。

$$\max \quad \log \frac{T!}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} r_{o_id_j}} \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_j r_{o_id_j} = V_{o_i} \tag{2}$$

$$\sum_i r_{o_id_j} = U_{d_j} \tag{3}$$

$$\sum_i \sum_j c_{o_id_j} r_{o_id_j} = C \tag{4}$$

ここで，$c_{o_id_j}$ は起点 o_i と終点 d_j の間の距離概念を反映するものであり，c は定数である。スターリングの近似を適用し，それぞれの制約に対してラグランジュ定数 λ_i, μ_j, β を用いることで，

$$r_{o_id_j} = \exp(-\lambda_i - \mu_j - \beta c_{o_id_j}) \tag{5}$$

が導かれる。ここで，

$$a_{0_i} = \exp(-\lambda_i)/V_{o_i} \tag{6}$$

$$b_{d_j} = \exp(-\mu_j)/U_{d_j} \tag{7}$$

とすれば，

$$r_{o_id_j} = a_{o_i} V_{o_i} b_{d_j} U_{d_j} \exp(-\beta c_{o_id_j}) \tag{8}$$

となる。

減衰関数に負の指数分布を用いるエントロピー最大化モデルは，

$$c_{o_id_j} = \log c'_{o_id_j} \tag{9}$$

とすることで

$$\exp(-\beta c_{o_id_j}) = c'^{-\beta}_{o_id_j} \tag{10}$$

とできることから，距離に関する減衰関数が負の多項関数で表される重力モデルに変換できる。

また，OD 行列の行と列に関する和の制約より

$$a_{o_i}^{-1}=\sum_j b_{d_j}U_{d_j}\exp(-\beta c_{o_id_j}) \tag{11}$$

$$b_{d_j}^{-1}=\sum_i a_{o_i}V_{o_i}\exp(-\beta c_{o_id_j}) \tag{12}$$

であることがわかる。それゆえ，

$$r_{d_j|o_i}=\frac{b_{d_j}U_{d_j}\exp(-\beta c_{o_id_j})}{\sum_j b_{d_j}U_{d_j}\exp(-\beta c_{o_id_j})} \tag{13}$$

とできる。

b_{d_j} の逆数は，ゾーン d_j の施設に対するゾーン o_i の利用者のアクセスを距離に応じて減衰させて得られるアクセシビリティを全ての利用者についてを合計したものとなっている。つまり利用者から見た各施設ごとのアクセシビリティを表している。同様に a_{o_i} の逆数は，施設からみた各ゾーンの利用者のアクセシビリティを表している。これらの値は絶対値の大きさは意味がなく相対的な比較が可能なだけである。

3．ファジィ確率施設配置問題の定式化

施設配置の目的と制約には様々なものが考えられるが，ここでは施設配置の目的がシェアの最大化であるとする。シェアの最大化は効用の総和の最大化と考えられる。制約条件として設置にかかる予算の上限と設置後の人件費を含む運営維持に必要な経費の上限があるものとする。

ここで，推定された効用関数，建設費用や運営費の値に不確実性と不確定性が存在する場合を考える。そこで，ファジィランダム変数を用いた施設配置問題を考える。ファジィランダム変数は確率変数の実現値がファジィ数である変数である。変数 X に不確定性が含まれることを $\tilde{X}$ で表し，不確実性が含まれることを $\overline{X}$ で表すとき，ファジィランダム変数は $\tilde{\overline{X}}$ と表される。

ファジィランダム変数 $\tilde{\overline{T}}$ は $\tilde{t}_\omega=(m_\omega,\ a_\omega,\ b_\omega)$ で表され，そのメンバーシップ関数は

$$\mu_{\tilde{l}_\omega}(x)=\begin{cases} L\left\{\dfrac{m_\omega-x}{a_\omega}\right\} & (x\leq m_\omega) \\ R\left\{\dfrac{x-m_\omega}{b_\omega}\right\} & (x\geq m_\omega) \end{cases} \tag{14}$$

であるとする。ここで，m_ω，スプレッド a_ω, b_ω は事象 $\omega\in\Omega$ であるときの確率変数である。型関数 L は $L(x)\triangleq\max\{0,\ l(x)\}$ で定められる $[0,\ \infty]\rightarrow[0,\ 1]$ への写像を与え，$l(x)$ は $l(0)=1$ を満たす狭義単調減少関数である。型関数 R も同様である。

いま，意思決定者が既に複数の施設 F_V が $|F_V|$ 個存在しているエリア（ゾーンの集合）に新しく $|F_U|$ 個の施設を配置することを考える。施設配置の目的として施設 F_U における利用者の潜在的な消費の総和を最大化することを考える。利用者の潜在的な消費 φ_l はアクセシビリティを用いて見積もることができ，不確実性と不確定性を考慮してファジィランダム変数

$$\tilde{\bar{\varphi}}_l:\ \tilde{\varphi}_{l\omega}(a_{l\omega}^{-1},\ \varphi_{L\omega},\ \varphi_{R\omega}) \tag{15}$$

で与えられるものとする。利用者が施設 F_V か施設 F_U を利用する割合は以下のように見積もることができる。制約としては配置にかかる設置費用と単位期間の人件費を含む運営費であるとする。その結果，以下のようなファジィランダム変数を目的関数と制約条件にもつ施設配置問題が定式化できる。

$$\max\quad \sum_l\frac{\tilde{\bar{\varphi}}_l\sum_{c\in F_U}b_cU_c\exp(-\beta c_{lc})\pi_c}{\sum_{c\in F_U}b_cU_c\exp(-\beta c_{lc})\pi_c+\sum_{c'\in F_V}b_{c'}U_{c'}\exp(-\beta c_{lc'})} \tag{16}$$

$$\text{Subject to}\quad \sum_{c\in F_U}(\tilde{a}_{ic})_\omega\pi_c=(\tilde{b}_i)_\omega \tag{17}$$

$$\sum_{c\in F_U}\pi_c=|F_U| \tag{18}$$

$$\pi_c\in\{0,\ 1\},\ \omega\in\Omega \tag{19}$$

ここで，新しい変数として

$$\pi'_{lc}=\frac{\pi_c\sum_{c\in F_U}b_cU_c\exp(-\beta c_{lc})\pi_c}{\sum_{c\in F_U}b_cU_c\exp(-\beta c_{lc})\pi_c+\sum_{c'\in F_V}b_{c'}U_{c'}\exp(-\beta c_{lc'})} \tag{20}$$

$$\eta_{lc}=\frac{b_c U_c \exp(-\beta c_{lc})\,\pi_c}{\sum_{c'\in F_V} b_{c'} U_{c'} \exp(-\beta c_{lc'})} \tag{21}$$

を導入すると[6]，以下のように変形できる。

$$\max \quad \sum_l \sum_c \tilde{\tilde{\varphi}}_l \eta_{lc}(\pi_c-\pi'_{lc}) \tag{22}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{c\in F_U} (\tilde{a}_{ic})_\omega \pi_c=(\tilde{b}_i)_\omega \tag{23}$$

$$\pi'_{lc} \geq \sum_{c\in F_U} \eta_{lc}(\pi_c-\pi'_{lc})-(1-\pi_c) \tag{24}$$

$$\sum_{c\in F_U} \pi_c=|F_U| \tag{25}$$

$$\pi'_{lc}\in R \tag{26}$$

$$\pi_c\in\{0,\ 1\},\ \omega\in\Omega \tag{27}$$

このとき，ファジィランダム変数 $\tilde{\tilde{X}}:\tilde{x}_\omega=(\phi_\omega,\ a_\omega,\ b_\omega)$ と $\tilde{\tilde{Y}}:\tilde{y}_\omega=(\rho_\omega,\ c_\omega,\ d_\omega)$ における α カットを用いて

$$S(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})_\alpha=X^U_\omega(\alpha)-Y^U_\omega(\alpha) \tag{28}$$

$$I(\tilde{\tilde{Y}},\ \tilde{\tilde{X}})_\alpha=X^L_\omega(\alpha)-Y^L_\omega(\alpha) \tag{29}$$

を考える。そのとき，$\tilde{\tilde{Y}}\leq\tilde{\tilde{X}}$ を以下のような優越性 $S(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})$ と劣等性 $I(\tilde{\tilde{Y}},\ \tilde{\tilde{X}})$ を定義することで考察できる[7]。

$$S(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})=\int_0^1 S(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})_\alpha d\alpha=\phi_\omega-\rho_\omega+\frac{b_\omega-d_\omega}{2} \tag{30}$$

$$I(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})=\int_0^1 I(\tilde{\tilde{X}},\ \tilde{\tilde{Y}})_\alpha d\alpha=\phi_\omega-\rho_\omega+\frac{c_\omega-a_\omega}{2} \tag{31}$$

ファジィランダム変数間の優越性と劣等性の概念から，それらに対するラグランジュ乗数を考慮してファジィ確率計画は以下のような確定的なモデルに変形される。

$$\max \quad \theta-\nu^s_{\omega 0}E[\theta^S_\omega]-\nu^I_{\omega 0}E[\theta^I_\omega]-\nu^S_{\omega j}E[\textstyle\sum_i \xi^S_{\omega i}]-\nu^I_{\omega j}E[\textstyle\sum_i \xi^I_{\omega i}] \tag{32}$$

$$\text{Subject to} \quad S(\theta,\ \sum_l \sum_c \tilde{\tilde{\varphi}}_l \eta_{lc}(\pi_c-\pi'_{lc}))=\theta^S_\omega \tag{33}$$

$$I(\sum_l \sum_c \tilde{\tilde{\varphi}}_l \eta_{lc}(\pi_c-\pi'_{lc}),\ \theta)=\theta^I_\omega \tag{34}$$

$$S_i\Big(\sum_{c\in F_v}(\tilde{a}_{ic})_\omega\pi_c,\ (\tilde{b}_i)_\omega\Big)=\xi^S_{\omega i} \tag{35}$$

$$I_i\Big((\tilde{b}_i)_\omega,\ \sum_{c\in F_v}(\tilde{a}_{ic})_\omega\pi_c\Big)=\xi^I_{\omega i} \tag{36}$$

$$\theta,\ \theta^S_\omega,\ \theta^I_\omega,\ \xi^S_{\omega i},\ \xi^I_{\omega i}\geq 0 \tag{37}$$

$$\pi_c=\{0,\ 1\},\ \omega\in\Omega \tag{38}$$

ここで，導入変数 π'_{lc} に関する制約もコスト制約と同時に扱っている。$\nu^S_{\omega j}$，$\nu^I_{\omega j}$ はペナルティを与える正の定数であり，整数計画問題となることがわかる。

6．おわりに

本論文ではエントロピー最大化モデルによる空間相互作用モデルにおいてアクセシビリティの導出について述べた。そのうえで，推定されたアクセシビリティを活用したファジィ確率計画による施設配置問題の定式化を行い，整数計画問題に変換できることを示した。その結果，緩和問題を構成し切除平面法や分枝限定法を適用して解を求めることができる。

参考文献

[1] Wilson, A.G., (1970), Entropy in urban and regional modelling, Pion, London.

[2] Weber, A., (1929), On the location of industries, University of Chicago Press, Chicago, IL

[3] Drezner, Z., and Wesolowsky, G.O., (1981), Optimum location probabilities in the l_p distance Weber problem, Transportation Science, 15, pp. 85-97.

[4] Hotelling, H., (1929), Stability in competition, The Economic Journal, 30, pp. 41-57.

[5] Hakimi, S.L., (1983), On locating new facilities in a competitive environment, European Journal of Operational Research, 1}, pp. 29-35.

[6] Benati, S., and Hansen, P., (2002), The maximum capture problem with random utilities: Problem formulation and algorithms, European Journal of Operational Research, 143, No. 3, pp. 518-530.

[7] Hop, V.N., (2007), Solving fuzzy (stochastic) linear programming problems using superiority and inferiority measures, Information Sciences, 177, No. 9, pp. 1977-1991.