不確実・不確定状況下でのマルチシナリオポートフォリオ選択問題

石　井　博　昭
蓮　池　　　隆

1．は　じ　め　に

昨今，国内外を問わず投資ファンドによる投資拡大が進み，それに伴う企業への配当増額要求や企業参画，最終的には企業買収といったニュースが多数報道され，投資に関する情報が広く知れ渡るようになってきている。さらにこれまで株式投資の大部分は企業や大口の機関投資家など，ある程度多額の資金を保有する投資家によってなされてきたが，デイトレーダーと呼ばれる個人投資家の数が急激に増え始め，様々な年金問題に代表されるような預貯金への不安や静から動へと移り行く現代社会において，投資が他人事ではすまされない状況に変化しており，その数理的基盤となる投資理論を理解することへの重要性がさらに増している。

株式等の金融資産に投資をする際，それぞれの資産に対する将来利益をあらかじめ予測し，現時点で最適な投資配分を決定しなくてはならない。無論将来収益が現時点で確定値としてわかっているならば，最適投資を決定することは容易である。しかし，収益は常に変動する不確実なものであり，社会情勢など多くの不確定要素が将来収益に多大な影響を及ぼすということも十分あり得る。そのような状況下でいかに損失リスクを抑え，利益が最大となるような投資決定を行うかが重要となる。

このような金融資産選択問題は一般的にポートフォリオ選択問題と呼ばれ，これまでに様々な研究が行われてきた。数理的なアプローチとしてはMarkowitz [6]が提唱した平均分散モデルに始まる。Markowitz は金融資産の価格を確率変動としてとらえ，投資に対するリスクとリターンの相反する2つの要素の組合せによって，最適なポートフォリオを決定する理論を構築した。その後 Markowitz の理論は Sharpe ら[5，7，9]による資本資産価格付けモデル（CAPM），今野らによる平均絶対偏差モデル[3，4]，VaR [8]など様々な形で応用され，今日においても投資理論を支える重要な数理的基盤となっている。また理論面だけではなく，市場データからの実証研究も多くなされている。

平均分散モデルも含めたこれらのポートフォリオ選択モデルは主に，収益率を期待値，不確実性となるリスクを分散といった非常に理解しやすい形で表現されていること，および当時はコンピュータなどの情報技術が発達していなかったことも要因となって，多くの実務家に用いられていた。

しかし近年の実証研究から，このような基本的なポートフォリオ選択モデルでは説明できないような現象が市場で確認されるようになっている。上記のようにモデルがあまりにシンプルな数式表現として書かれていることや，モデルが成立する仮定（効率市場仮説）が現実市場にそぐわなくなってきたことも要因となっている。これらを解析するために，行動ファイナンス[10]や経済物理学[11]など，現在多方面から研究が進められている。また既存のポートフォリオ選択モデルの拡張[1]といった観点からも研究が進んでいる。本論文では数理計画の立場からのポートフォリオ選択モデルの拡張，特に将来収益などに不確実・不確定な要素を含み，それらを確率変数やファジィ数としてとらえるマルチシナリオポートフォリオ選択問題について考察する。

2．シナリオを想定したポートフォリオ選択問題

通常投資家が将来収益を予測する際，将来起こりうる様々な状況を想定し多数の収益シナリオを設定する場合が多い。またそれぞれの収益シナリオにおい

て，その生起確率を設定することも一般的である。そのような収益シナリオを次のように表現する。

$$\mathbf{r}=\begin{cases}\mathbf{r}_1=\{r_{11},\ r_{11},\ \cdots,\ r_{1n}\} & \Pr\{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1\}=p_1\\ \mathbf{r}_2=\{r_{21},\ r_{22},\ \cdots,\ r_{2n}\} & \Pr\{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2\}=p_2\\ \vdots & \\ \mathbf{r}_m=\{r_{m1},\ r_{m2},\ \cdots,\ r_{mn}\} & \Pr\{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m\}=p_m\end{cases} \tag{1}$$

この収益シナリオを用いて，期待利益最大化を目的としたポートフォリオ選択問題は Markowitz による平均分散モデルを用いると次のように表現できる。

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \ \sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{j=1}^{n}r_{ij}x_j\\ &\text{subject to} \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j\leq\sigma\\ &\qquad\qquad\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\leq b,\ 0\leq x_j\leq b_j,\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，a_j は各資産単位量あたりの購入コスト，b は最大資金量，b_j は各資産に対する最大購入量とする。本論文ではそれぞれのシナリオに対する各資産の収益 r_{ij} に対し，(a)平均値 $\bar{r}_{ij}$，分散 σ_{ij}^2 となる正規分布 $N(\bar{r}_{ij},\ \sigma_{ij}^2)$ に従う場合，および(b)収益予測をする際に得られた情報の質の違いや意思決定者の予測の曖昧さを考慮した場合について考察していく。

3．収益が確率変数に従う場合

各収益率を上記のように正規分布 $N(\bar{r}_{ij},\ \sigma_{ij}^2)$ に従う確率変数とし，また総てのシナリオに対し収益が最大となるような場合の多目的ポートフォリオ選択問題を考える場合，この問題の定式化は次のような形となる。

$$\begin{aligned}&\text{Maximize} \ \sum_{j=1}^{n}r_{1j}x_j\\ &\text{Maximize} \ \sum_{j=1}^{n}r_{2j}x_j\\ &\quad\vdots\end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{Maximize } \sum_{j=1}^{n} r_{mj} x_j$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n)$$

上記の問題で各収益が確率変数であり目的関数に分散が含まれているため，制約条件の中から分散制約を取り除くことにする。一方で確率変数を含む多目的問題となるため，解析的に最適ポートフォリオを求めることは困難である。

ここで本論文では，それぞれのシナリオに付加されている生起確率を用い，その生起確率を考慮しそれぞれの収益シナリオに対する重み付けを行う状況を想定した問題を考える。目的関数に重み付けを行った単一目的問題を次のような形で提案する。

$$\begin{aligned} &\text{Maxinimize } \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{4}$$

この問題は目的関数に確率変数を含んでいるため，このままの形では目的関数を確定的に最大化することができず，何らかの基準設定を行う必要がある。今回は確率機会制約条件を用いて，確率満足度最大化モデルを考える。つまり，ある目標収益以上となる確率を考え，その確率以上となる状況下でどこまで目標収益を最大化させることができるかを考察する問題である。このモデルは次のような形で表現できる。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } f \\ &\text{subject to } \Pr\left\{ \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \geq f \right\} \geq \beta, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで確率制約部分に注目すると，このままの形では数理計画問題としては扱いにくいため，正規分布の加法性および標準化を行うことで，次のような不等式へと変形する。

$$\Pr\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \geq f\right\} \geq \beta$$

$$\Leftrightarrow \Pr\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)}} \geq \frac{f - \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)}}\right\} \geq \beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j - f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)}} \geq K_{1-\beta} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j - K_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)} \geq f$$

この不等式を用いることで，主問題は次の等価確定問題として与えられることになる。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } f \\ &\text{subject to } \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j - K_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)} \geq f, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{7}$$

この問題の不等式の左辺と右辺は独立として考えることができるものであり，右辺の最大化は自動的に左辺の最大化を考えればよいため，次の問題と等価となる。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j - K_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)} \\ &\text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n) \\ \Leftrightarrow\ &\quad \text{Minimize } -\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j - K_{1-\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (w_i x)^t \mathbf{V}_i (w_i x)} \\ &\quad \text{subject to } \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{8}$$

この最小化問題は目的関数が凸関数であり，制約条件が線形性をもつことから，凸計画問題となる。しかし根号項が存在するため，まだ解析的に解きやす

いとは言いがたい。よって，それを解消するために，この問題に対する次の補助問題を導入する。

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad -R\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_{ij} x_j + \frac{K_{1-\beta}}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(w_i x)' \mathbf{V}_i (w_i x)\right) \\
&\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ (j=1, 2, \cdots, n)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

この補助問題はパラメータ R を含んでいるものの，x についての凸 2 次計画問題をとなるため，問題(8)よりも解析的に容易に解ける問題と変形できていることになる。ここで問題(8)と補助問題(9)の間で次の定理が成り立つ。

定理 1

問題(9)の最適解を x^* とし，$R=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i x^*)' V_i (w_i x^*)}$ とした場合，x^* は問題(8)の最適解と一致する。

証明

それぞれの問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を導出すると次のようになる。

(問題(8)の KKT 条件)

$$
-\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{r}_{ij} + K_{1-\beta}\frac{\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{V}_i)_j (w_i x^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i x^*)' \mathbf{V}_i (w_i x^*)}} + \lambda a_j + u_j - \nu_j = 0
$$

$$
\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b\right)=0,\ u_j(x_j - b_j)=0,\ \nu_j x_j = 0,\ (j=1, 2, \cdots, n)
$$

(問題(9)の KKT 条件)

$$
-R_1 \sum_{i=2}^{m} w_i \bar{r}_{ij} + K_{1-\beta}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{V}_i)_j (w_i x^*) + \lambda' a_j + u'_j - \nu'_j = 0,
$$

$$
\lambda'\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b\right)=0,\ u'_j(x_j - b_j)=0,\ \nu'_j x_j = 0,\ (j=1, 2, \cdots, n)
$$

ここで，$\lambda=\dfrac{\lambda'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i x^*)^t V_i(w_i x^*)}}$, $u_j\dfrac{u_j'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i x^*)^t V_i(w_i x^*)}}$,

$$\nu_j=\frac{\nu_j'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i x^*)^t V_i(w_i x^*)}}$$

とすれば，KKT 条件が一致するため，最適解は一致する。□

また議論を簡単にするため，次のような変数変換を行うことで，

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^2 \mathrm{V}_i=\mathrm{V},\ x^t \mathrm{V} x=y^t y$$

$$\mathrm{V}=Q'\Lambda Q,\ Q:\text{ eigen vector of }\mathrm{V},$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix},\ \lambda_j:\text{ eigen value of }\mathrm{V},$$

$$\boldsymbol{y}=\sqrt{\Lambda}\,Q\boldsymbol{x},\ \bar{\boldsymbol{r}}'=(\sqrt{\Lambda})^{-1}Q\bar{\boldsymbol{r}},\ \boldsymbol{a}'=(\sqrt{\Lambda})^{-1}Q\boldsymbol{a},\ b'=(\sqrt{\Lambda})^{-1}Qb,\ \mathbf{b}'=(\sqrt{\Lambda})^{-1}Q\mathbf{b}$$

変数の設定をしなおし，主問題と等価な次の問題を得る。

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\quad -R\sum_{i=1}^{m} w_i\sum_{j=1}^{n}\bar{r}_{ij}x_j+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\\&\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n}a_j x_j\le b,\ 0\le x_j\le b_j,\ (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{10}$$

よってこの問題の KKT 条件から最適解を求めると次のような形となる。

$$x_j^*=\begin{cases} b_j\left(\lambda\le\dfrac{R\sum_{i=1}^{m}w_i\bar{r}_{ij}-b_i}{a_j}\right)\\[2ex] R\sum_{i=1}^{m}w_i\bar{r}_{ij}-a_j\lambda\left(\dfrac{R\sum_{i=1}^{m}w_i\bar{r}_{ij}-b_i}{a_j}\le\lambda\le\dfrac{R\sum_{i=1}^{m}w_i\bar{r}_{ij}}{a_j}\right)\\[2ex] 0\left(\dfrac{R\sum_{i=1}^{m}w_i\bar{r}_{ij}}{a_j}\le\lambda\right)\end{cases},\ (j=1,\cdots,n)\tag{11}$$

この最適解で，パラメータ R の値が最終的に確定すれば，厳密な意味での最適解が得られることになる。このパラメータの決定方法は[2]で用いられている解法と同様にして決定される。

4．収益に曖昧さを含んだマルチシナリオポートフォリオ選択問題

前章ではそれぞれの資産に対する収益を正規分布に従う確率変数として考えたが，本章では収益に関して，『だいたいこのくらいの値』といった曖昧さを含んだ状況を考慮したマルチシナリオポートフォリオ選択問題を考察していく。本論文では曖昧さを含んだ収益を次のようなメンバシップ関数を持つファジィ数として表現する。

$$\mu_{r_{sj}}(\omega)=(r_{sj}^{(L)},\ r_{sj}^{(R)},\ \alpha_j,\ \beta_j)_{LR}$$
$$=\begin{cases} L\left(\dfrac{r_{sj}^{(L)}-\omega}{\alpha_j}\right) & (r_{sj}^{(L)}-\alpha_j\leq\omega\leq r_{sj}^{(L)}) \\ 1 & (r_{sj}^{(L)}\leq\omega\leq r_{sj}^{(R)}) \\ R\left(\dfrac{\omega-r_{sj}^{(R)}}{\beta_j}\right) & (r_{sj}^{(R)}\leq\omega\leq r_{sj}^{(R)}+\beta_j) \\ 0 & (\omega\leq r_{sj}^{(L)}-\alpha_j,\ r_{sj}^{(R)}+\beta_j\leq\omega) \end{cases} \tag{12}$$

ここで，$L(x), R(x)$ はそれぞれ単調非増加関数であり，$L(0)=R(0)=1$, $L(1)=R(1)=0$ である。またこの章では，今野らにより提案された平均絶対偏差モデルを用いてマルチシナリオポートフォリオ選択問題を考えていく。この平均絶対偏差モデルは Markowitz の平均分散モデルと並んで，ポートフォリオ選択問題ではよく用いられるモデルである。このモデルは通常，収益最大化を考慮した場合，次のような形で定式化される。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } \sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j x_j \\ &\text{subject to } \left|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j-\sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j x_j\right|\leq\sigma \\ &\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\leq b,\ 0\leq x_j\leq b_j \end{aligned} \tag{13}$$

しかし，収益がファジィ数として表現されている場合は，目的関数および絶対偏差部分もファジィ数となるため，このままの形では確定的に最大化することができない。よって本論文では機会制約条件を取れいれた可能性計画問題，特に可能性最大化問題として考えていく。

$$\begin{aligned}&\text{Maximize } \alpha\\&\text{subject to } \mathrm{Pos}\left\{\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j \geq f\right\} \geq \alpha\\&\qquad\qquad \mathrm{Pos}\left\{\sum_{t=1}^{m}p_t\left|\sum_{j=1}^{n}r_{tj}x_j-\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j\right| \leq \sigma\right\} \geq h\\&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n}a_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j\end{aligned} \tag{14}$$

ここでそれぞれの可能性制約部分に注目し，等価確定な不等式制約になるように変形を行っていく。まず初めに収益に関する可能性制約は $\tilde{Y}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j$ のファジィ数に対する α カットが，

$$\mu_{\tilde{Y}}(\omega)=\left(\sum_{t=1}^{m}p_t\sum_{j=1}^{n}r_{tj}^{(L)}x_j,\ \sum_{t=1}^{m}p_t\sum_{j=1}^{n}r_{tj}^{(R)}x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j\right)_{LR}$$

となることから，可能性制約は次のような不等式に変形できる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pos}\left\{\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j \geq f\right\} \geq \alpha\\&\Leftrightarrow\quad \sum_{t=1}^{m}p_t\sum_{j=1}^{n}r_{tj}^{(R)}x_j+R_Y^{*}(\alpha)\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j \geq f\end{aligned} \tag{15}$$

よって絶対偏差に関する可能性制約は，$\tilde{D}=\sum_{j=1}^{n}r_{tj}x_j-\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j x_j$ に対するメンバシップ関数の h カットが，

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{D}}(\omega)=\Bigg[&\sum_{j=1}^{n}\left(r_{tj}^{(L)}-\sum_{t=1}^{m}p_t r_{tj}^{(R)}\right)x_j-L^{*}(h)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j-R^{*}(h)\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j,\\&\sum_{j=1}^{n}\left(r_{tj}^{(R)}-\sum_{t=1}^{m}p_t r_{tj}^{(L)}\right)x_j+R^{*}(h)\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j+L^{*}(h)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\Bigg]\end{aligned}$$

となることからそれぞれの数の正負も考慮して，次の４パターンによって表現される。

$$\mathrm{Pos}\left\{\sum_{t=1}^{m} p_t \left| \sum_{j=1}^{n} r_{tj} x_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j \right| \leq \sigma \right\} \geq h$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{m} p_t \left(\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \right) x_j \right. \\ \qquad \left. - L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right) \leq \sigma \\ \sum_{t=1}^{m} p_t \left(-\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \right) x_j \right. \\ \qquad \left. + L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right) \leq \sigma \\ \sum_{t=1}^{m} p_t \left(\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(R)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(L)} \right) x_j \right. \\ \qquad \left. + R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) \leq \sigma \\ \sum_{t=1}^{m} p_t \left(-\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(R)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(L)} \right) x_j \right. \\ \qquad \left. - R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) \leq \sigma \end{cases} \tag{16}$$

となる。これらの等価確定な不等式制約を問題(14)に導入すると，次のような二種類の等価確定問題が得られる。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } \alpha \\ &\text{subject to } \sum_{t=1}^{m} p_t \sum_{j=1}^{n} r_{tj}^{(R)} x_j + R^*(\alpha) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \geq f, \\ &\qquad \sum_{t=1}^{m} p_t \left(\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \right) x_j \right. \\ &\qquad\qquad \left. - L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right) \leq \sigma, \\ &\qquad \sum_{t=1}^{m} p_t \left(-\sum_{j=1}^{n} \left(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \right) x_j \right. \\ &\qquad\qquad \left. + L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right) \leq \sigma, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j \end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{Maximize } \alpha$$

$$\text{subject to } \sum_{t=1}^{m} p_t \sum_{j=1}^{n} r_{tj}^{(R)} x_j + R^*(\alpha) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \geq f,$$

$$\sum_{t=1}^{m} p_t \Biggl(\sum_{j=1}^{n} \Bigl(r_{tj}^{(R)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(L)} \Bigr) x_j$$

$$+ R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \Biggr) \leq \sigma, \tag{18}$$

$$\sum_{t=1}^{m} p_t \Biggl(- \sum_{j=1}^{n} \Bigl(r_{tj}^{(R)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(L)} \Bigr) x_j$$

$$- R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j - L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \Biggr) \leq \sigma,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j$$

これらの問題は数理計画問題としては同等の問題であることから，問題(17)の解法を考える。ここで，$R^*(\alpha)$ は α に関して単調減少関数であることから，次のような問題に変形することが可能である。

$$\text{Maximize } \frac{f - \sum_{t=1}^{m} p_t \sum_{j=1}^{n} r_{tj}^{(R)} x_j}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j}$$

$$\text{subject to } \sum_{t=1}^{m} p_t \Biggl(\sum_{j=1}^{n} \Bigl(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \Bigr) x_j$$

$$- L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \Biggr) \leq \sigma, \tag{19}$$

$$\sum_{t=1}^{m} p_t \Biggl(- \sum_{j=1}^{n} \Bigl(r_{tj}^{(L)} - \sum_{t=1}^{m} p_t r_{tj}^{(R)} \Bigr) x_j$$

$$+ L^*(h) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + R^*(h) \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \Biggr) \leq \sigma,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq b,\ 0 \leq x_j \leq b_j$$

この問題は分数計画問題となるため，$\lambda = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j}$ および $y_j = \lambda x_j$ と変形をする

ことで次の問題に変形することができる。

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize}\ \ f\lambda-\sum_{t=1}^{m}p_t\sum_{j=1}^{n}r_{tj}^{(R)}y_j \\
&\text{subject to}\ \ \sum_{t=1}^{m}p_t\left(\sum_{j=1}^{n}\left(r_{tj}^{(L)}-\sum_{t=1}^{m}p_t r_{tj}^{(R)}\right)y_j\right. \\
&\qquad\qquad\left.-L^*(h)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j-R^*(h)\right)\leq\sigma\lambda, \\
&\qquad\qquad \sum_{t=1}^{m}p_t\left(-\sum_{j=1}^{n}\left(r_{tj}^{(L)}-\sum_{t=1}^{m}p_t r_{tj}^{(R)}\right)y_j\right. \\
&\qquad\qquad\left.+L^*(h)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j+R^*(h)\right)\leq\sigma\lambda, \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j\leq\lambda b,\ 0\leq y_j\leq\lambda b_j
\end{aligned}
\tag{20}
$$

よって主問題(17)はこの y_j と λ についての線形計画問題を解けば最適解が求められることから，単体法や内点法など標準的な線形計画問題の解法を用いて，曖昧さを含んだマルチシナリオポートフォリオ問題を解くことが可能である。

5. 数　値　例

これまでに提案したモデルと基本的なポートフォリオ選択問題のモデルとして，Markowitz の平均分散モデルとの比較を数値例により示す。数値例として，Markowitz の論文[6]にある数値例を基本し，資産数 9，シナリオ数 3 の場合を考え（表 1），各資産に対する資金配分比率の最適化を行う。制約条件式は，

$$
\sum_{j=1}^{n}x_j=1,\ 0\leq x_j\leq 0.2,\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
$$

とする。また各シナリオに対する重み付けは，$p_1=w_1=0.4$，$p_2=w_2=0.3$，$p_3=w_3=0.3$ とし，ファジィ数として対称型三角ファジィ数を用いて数値計算を行う。

シナリオ 1 の期待収益率を用いた場合の Markowitz 平均分散モデル，および重み付けを行ったポートフォリオモデルとファジィ数を想定したポートフォリ

表1　各資産に対する収益率及び標準偏差の数値例

資産	シナリオ1の期待収益率	シナリオ2の期待収益率	シナリオ3の期待収益率	標準偏差	ファジイ数（三角ファジィ数）
R1	0.066	0.077	0.058	0.238	$\langle \bar{r}_{i1}, 0.01 \rangle$
R2	0.062	0.055	0.070	0.125	$\langle \bar{r}_{i2}, 0.02 \rangle$
R3	0.146	0.164	0.126	0.301	$\langle \bar{r}_{i3}, 0.02 \rangle$
R4	0.173	0.148	0.191	0.318	$\langle \bar{r}_{i4}, 0.04 \rangle$
R5	0.198	0.211	0.177	0.368	$\langle \bar{r}_{i5}, 0.05 \rangle$
R6	0.055	0.051	0.067	0.209	$\langle \bar{r}_{i6}, 0.02 \rangle$
R7	0.128	0.130	0.120	0.175	$\langle \bar{r}_{i7}, 0.05 \rangle$
R8	0.118	0.109	0.130	0.286	$\langle \bar{r}_{i8}, 0.03 \rangle$
R9	0.116	0.127	0.109	0.290	$\langle \bar{r}_{i9}, 0.04 \rangle$

オモデルの数値実験による最適ポートフォリオは表2のとおりである。なお，分散の目標値σを$\sigma=0.03$，重み付けの場合で用いる確率レベルβを$\beta=0.8$，ファジィ数の場合で用いる目標収益率fを$f=0.09$と設定する。

表2の結果より，この数値例では重み付けがシナリオ1を中心として対称につけられており，また3つのシナリオの期待収益率の平均がほぼシナリオ1の期待収益率となることから，平均と重み付けの場合の最適ポートフォリオではあまり差異が見られないが，ファジィ数として想定した場合の最適ポートフォリオは全く異なった値となる。結果から，ファジィ数の場合の最適ポートフォリオは，曖昧さの度合いが少ない，つまりファジィ数の幅が小さいものやシナ

表2　それぞれの場合における最適ポートフォリオ

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9
平均分散	0.069	0.124	0.115	0.129	0.127	0.066	0.175	0.099	0.096
重み付け	0.045	0.131	0.125	0.140	0.125	0.034	0.2	0.102	0.097
ファジィ	0.2	0.2	0	0	0	0.2	0	0.2	0.2

リオ間の期待収益率のばらつきが少なく，その中でも正へのばらつきが大きく負へのばらつきが小さいものを選ぶ傾向にある。

6．おわりに

本論文では，将来収益に対し数パターンの収益シナリオを想定したポートフォリオ選択問題を考察した。各収益が確率変数に従う場合や曖昧さを表現するファジィ数とした場合の両方について，機会制約条件を導入し等価確定問題に変形を行うと，確率変数が正規分布に従う場合はパラメトリック2次計画問題に，ファジィ数を想定した場合は線形計画問題となり，解析的に最適解の導出が可能であることを示した。またその数値例を用いて，確率変数の場合，ファジィ数の場合との間の差異を確認した。本論文により，様々な状況下におけるポートフォリオ選択問題のモデルが解析的に解けることを示しており，今後今回に取り扱ったモデル以外（下方分散モデルや VaR など）に適用することが可能であると考えられる。

今後の研究課題としては，決定変数の離散化が求められる。ポートフォリオ選択問題も含めた資産選択・資産配分問題は，株式投資であれば株数，工場などであればある品物の毎月の生産量など連続変数で表すことができないものも多く存在する。一方で，数理計画問題の側面から見ると，離散最適化問題は解析的に解くことが非常に難しく，解けるような解法であったとしても，計算時間が指数的に爆発してしまうものがほとんどである。よって，離散最適化の解法提案も含めた形での離散ポートフォリオ選択問題を考察していく必要がある。また，多期間ポートフォリオ選択問題も考察していくべき問題である。多期間の投資になると，より不確実・不確定性が増すため，今回提案したモデルを拡張していく価値が非常に高いものとなる。

現代社会はより高度に複雑化しているため，ほんの少しの未来を考えるだけでも確実に予測できることは少なく，不確実さがより増大している。また情報技術の発達により，これまでには考えられなかった膨大な情報が瞬時に入手で

きる状況になっている一方で，その情報の質は多種多様になり，またそれを処理し最終的に意思決定を行う人間の判断の曖昧さも重なって，不確定な状況を作り上げている。このような状況下で，それらを考慮した数理科学的な意思決定を行うことがより重要になってきており，本論文がその一助になれば幸いである。

参 考 文 献

[1] Fama, Eugene, "Market-Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance", Journal of Financial Economics, 49 No. 3 (1998) 283-306

[2] T. Hasuike, H. Katagiri, H. Ishii, "Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns", Proc. FUZZ-IEEE 2007, accepted.

[3] H. Konno, "Piecewise linear risk functions and portfolio optimization", *Journal of Operations Research Society of Japan,* 33 139-159, 1990

[4] H. Konno, H. Shirakawa, H. Yamazaki, "A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model", *Annals of Operations Research,* 45 205-220, 1993

[5] B J. Lintner, "Valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", Rev. Econom. Statist. 47, 13-37, 1965

[6] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,* Wiley, New York, 1959

[7] J. Mossin, "Equilibrium in capital asset markets", *Econometrica* 34(4), 768-783, 1966

[8] R. T. Rockfellar and S. Uryasev, "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk,* 2(3) 1-21, 2000

[9] W. F. Sharpe, "Capital asset prices: A theory of market equivalent under conditions of risk", *Journal of Finance* 19(3), 425-442, 1964.

[10] H. Shefrin, *Beyond Greed and Fear, Understanding Behavioral Finance and the Psychology of Investing, Oxford University Press,* (2002)

[11] H. Takayasu, *Application of Econophysics,* Springer Verlag, (2003)