合意形成の数理的研究

石　井　博　昭
田　辺　佳世子

1　は　じ　め　に

選好の順序付けに関する研究は18世紀まで遡り，Condorcet [4]の多数決原理や Borda [2]の評点方式がある。この Borda の評点法は選択順位に重みを設け，対象のそれぞれの選択順位の得票数とその重みとの積和合計の大きさによって対象の総合順序を決める方法であるが，様々な観点から重み付けの妥当性は議論され，Kessey [13]が個々の対象の各順位の得票数に応じて各対象毎に順位の重みを決める方法を提示している。さらに，Cook and Kress [5]らは DEA 分析法を応用して，各対象にとって有利な重みを決める方法にまで発展させている。Green et al. [7]は Cook and Kress の投票方式において，各順位に対応する係数の制約条件に関する研究を行い，2 種類の順序付け法を提案している。Noguchi and Ishii[14]は Green et al. の順序付け法を実際問題へ適用する上での問題点について研究を行っている。

一方，多目的の観点から対象を総合的に順序付ける研究もされている。代表的なアプローチの仕方は，評価観点の分類（階層化），各評価観点からの対象の相対比較という 2 段階の評価を行う方法と評価観点を設けずに個々の対象の一対比較をすることで順序付ける方法である。前者には Ogawa and Ishii [16]による Cook and Kress の投票方式に AHP を適用した方法が，後者には Roy らによる outranking [3][17][18]がある。

これらの投票方式が選択によって得られる利得を最大にするという最適化原理に基づいた方式であるのに対して，意思決定者間の意見の相違をできるだけなくすという，合意形成に注目した順序付けは Blin [1]，Cook et al [6]，Kemeny and Snell [10]，Kendall [11] らにより提案されている。

様々な投票方式が提案されているが，方式により「勝者」の意味合いは異なる。例えば Condrcet の多数決投票の考え方は「強いもの勝ち」である。一対の候補者に対する支持者の数の大小関係で勝負を決めるもので，その勝ち方が大差であろうと小差であろうと問題にしていない。一方，Borda の評点方式は「全体的に優れたもの」を選出する方式で，多くの投票者が高い順位に位置づけているものが選出されるべきだという考えが背後にある。このように投票における勝者の意味付けは十分に注意されなけらばならない [19]。

本研究では距離関数を利用した連記投票モデルの構築を目指す。単記投票制が 1 枚の投票用紙に 1 名の候補者を記して投票する制度に対して，連記投票制は 2 名以上の候補者を記する投票制度である。単記投票では他の候補とは異なる「特別な候補・優れた候補」に票を投じる一方，連記投票は「ペアとして最適なもの」を考える方式だと言える。例えば，欲しい車 2 台の連記投票を考えたとき，1 台はスポーツカー・もう 1 台はキャンピングカーというように異なるタイプのものに票を投じることが考えられる。しかし通常の投票方式では，総得票数の上位の候補から選ばれるため，投票者が望む組合せの選好を反映しているとは言えない。

本研究では順位をつけて複数の候補者に投票する場合を考え，得られた順位別投票データからどのように各意思決定者の選好の組合せを統合するかを考察して数理モデルを提案し，その評価を行う。本論文の構成は以下の通りである。

第 2 章では，本研究の基礎モデルである距離関数を用いた投票モデルについて述べる。

第 3 章では，本研究で提案する連記投票モデルについて説明する。

第 4 章では，本研究の総括を行い得られた成果や意義をまとめる。

2　距離関数による合意形成

意思決定者間の合意形成をはかるために距離関数を利用する方法がある。これは，意思決定者間の選好が最も近い，つまり最小距離のとき合意形成が得られると考える方法で，Kemeny and Snell（以下 KS）が提唱し，Blin と Cook and Seiford（以下 CS）が研究を推し進めた。

数学的に距離は次の1～3の公理を満たさなければならない。さらに距離関数 d_{cs} は4～6の条件を満たすものを考える。

1．$d_{cs}(A, B) \geq 0$, $A \equiv B$ のとき0

2．$d_{cs}(A, B) = d_{cs}(B, A)$

3．$d_{cs}(A, C) \leq d_{cs}(A, B) + d_{cs}(B, C)$

4．$d_{cs}(A, B) = d_{cs}(A', B')$ A', B' が候補者の同じ並び換えで表される A, B からそれぞれ得られる場合

5．（n 次元から（$n+1$）次元になるとき）A^*, B^* が（$n+1$）番目にある同じ候補をつけ加えて A, B から得られるなら $d_{cs}(A^*, B^*) = d_{cs}(A, B)$）

6．（スケーリング）最小距離は1

この性質を満たす l^1 norm の距離関数は次のように表される。

$$d_{cs}(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \qquad (1)$$

合意形成は投票者の順位付けの不一致度を「距離」で表し，この距離を最小化することによって得られる。投票者 m 人の選好ベクトル $\{A^l\}_{l=1}^{m}$ を用いると次式のようになる。

$$\sum_{l=1}^{m} d_{cs}(A^l, B^*) = \min_{B} \sum_{l=1}^{m} d_{cs}(A^j, B) = \min \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_i^l - b_i| \qquad (2)$$

また，KS は投票者のペアの一対比較行列A，Bを用いた次の距離関数を提案した。

$$d_{KS}(A, B) = \sum_{i} \sum_{j} |a_{ij} - b_{ij}| \qquad (3)$$

2.1　Blin の絶対距離関数

n 個の対象の順位付け A を 2 進数の行列 $\alpha=\{\alpha_{ij}\}$ を用いて次式のように表す。

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}1 & \text{対象 } i \text{ の順位が } j\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{4}$$

同様に順位付け B を行列 β を用いて表すと，Blin の距離関数 $d_B(A, B)$ は次式の l^1 ノルムで定義される。

$$d_B(A, B)=\sum_i^n\sum_j^n|\alpha_{ij}-\beta_{ij}| \tag{5}$$

内積を用いると，この距離は

$$d_B(A, B)=\sum_i^n\sum_j^n\alpha_{ij}\beta_{ij} \tag{6}$$

となる。

投票者 m 人の順位付け $A^l(l=1, \cdots, m)$ を次の行列 π

$$\pi_{ij}=\sum_{l=1}^m\alpha_{ij}^l \tag{7}$$

を用いて統合すると，合意形成 $X^B=\{x_{ij}^B\}$ は次式の線形割り当て問題を解くことにより得られる。

$$\max \quad \sum_{l=1}^m d_B(A^l, B)=\sum_i^n\sum_j^n\pi_{ij}x_{ij} \tag{8}$$

$$s.t. \tag{9}$$

$$\sum_i^n x_{ij}=\sum_j^n x_{ij}=1, \quad x_{ij}\geq 0 \tag{10}$$

制約条件は「同順位を考慮しない」「ある対象がとりうる順位は 1 つ」としている。

Blin の距離関数の問題点は，絶対的な位置関係しか考慮していない点である。つまり，投票者間の順位付けが「一致する」か「一致しない」かの違いしか考慮しておらず，各対象に割り当てられた順位のパターンを反映していない。

2.2 Cook and Kress の相対距離関数

Blin の絶対距離関数に対し，Cook and Kress は順位の違いを考慮した相対距離関数を提案した。選好の表し方により，順位をもとにした距離（rank based distance）と対象をもとにした距離（object distance distance）とがある。

2.3 順位をもとにした距離関数（rank based distance）

ある対象 i が j 位にランク付けられたとき，それよりも上位の状態を示すベクトル $P^+(j)$ と下位の状態を示す $P^-(j)$ を次のように定義する。

$$P^+(j)=\left[\sum_{t=j+1}^{n}\alpha_{it}\right] \tag{11}$$

$$P^-(j)=\left[\sum_{t=1}^{j-1}\alpha_{it}\right] \tag{12}$$

例えば，対象 i（$A, \cdots, D$）を（A, B, C, D）$=(2, 3, 1, 4)$ と順位付けた場合を考える。各行に対象を，各列に順位を対応させると，行列 $[\alpha_{ij}]$ は次のようになる。

$$[\alpha_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

この時，

$$P^+(1)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P^+(2)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P^+(3)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P^+(4)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる。つまり，$P^+(1)$ は $[\alpha_{ij}]$ で2位から4位までの列ベクトルの和

$$P^+(1)=\sum_{j=2}^{4}\alpha_j=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となっている。$P^+(2)$〜$P^+(4)$ も同様である。

このベクトル $P^+(j)$ と $P^-(j)$ を用いて，Cook and Kress の相対距離関数は次式のように定義される。

$$d_P(A,B)=n(n-1) - \sum_{j=1}^{n}[<P_A^+(j), P_B^+(j)>+<P_A^-(j), P_B^-(j)>] \tag{16}$$

A と B の順位付けが $n-k$ 異なるとき

$$<P_A^+(j), P_B^+(j)>+<P_A^-(j), P_B^-(j)>=k-1 \tag{17}$$

となるので，A と B の順位が一致するとき $d_P(A,B)=0$，A が1位，B が n 位と最も順位付けが異なるとき $d_P(A,B)=n$ となる。このようにして Cook and Kress の相対距離関数では順位付けの大きさ違いが距離に反映される。

なお，この相対距離関数は Cook and Seiford の距離関数 $d_{CS}(A,B)$（式(1)参照）と等しいことが証明されている。

$$d_P(A,B)=d_{CS}(A,B) \tag{18}$$

相対距離関数を用いると，投票者 m 人の合意形成は次の線形割り当て問題を解くことにより得られる。

$$\max \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[<P_l^+(j), P_X^+(j)>+<P_l^-(j), P_X^-(j)>] \tag{19}$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{t=j+1}^{n}\alpha_{it}\right)\left(\sum_{t=j+1}^{n}x_{it}\right)+\left(\sum_{t=1}^{j-1}\alpha_{it}\right)\left(\sum_{t=1}^{j-1}x_{it}\right)\right] \tag{20}$$

$$s.t. \tag{21}$$

$$\sum_{i}^{n}x_{ij}=\sum_{j}^{n}x_{ij}=1, \quad x_{ij}=0,1 \tag{22}$$

この場合，制約条件 $x_{ij}=0,1$ を $x_{ij}\geq 0$ としても結果は同じである。

2.4 対象をもとにした距離関数（object based distance）

順位をもとにした距離（rank based distance）と同様の考え方で対象をもとにした距離（object distance distance）は定義できる。

ある対象 k を対象 i と比較したとき，対象 i よりも上位の状態を示すベクトル $O^{+}(i)$ と下位の状態を示すベクトル $O^{-}(i)$ を次のように定義する。

$$O^{+}(i)=\left[\sum_{t=j_i+1}^{n}\alpha_{kt}\right] \tag{23}$$

$$O^{-}(i)=\left[\sum_{t=1}^{j_i-1}\alpha_{kt}\right] \tag{24}$$

ただし，$\alpha_{ij_i}=1$ (25)

このベクトル $O^{+}(i)$ と $O^{-}(i)$ を用いて，Cook and Kress の相対距離関数は次式のように定義される。

$$d_O(A,B)=n(n-1)-\sum_{j=1}^{n}\left[<O_A^{+}(j),O_B^{+}(j)>+<O_A^{-}(j),O_B^{-}(j)>\right] \tag{26}$$

なお，この相対距離関数は Kemeny and Snell の距離関数 $d_{KS}(A,B)$（式(3)参照）と等しいことが証明されている。

$$d_O(A,B)=d_{KS}(A,B) \tag{27}$$

相対距離関数を用いると，投票者 m 人の合意形成は次の2次線形割り当て問題を解くことにより得られる。

$$\max \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}<O_l^{+}(i),O_X^{+}(i)> \tag{28}$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_{ik}^{l}x_{ij}\sum_{t=j+1}^{n}x_{kt} \tag{29}$$

$s.t.$ (30)

$$\sum_{i}^{n}x_{ij}=\sum_{j}^{n}x_{ij}=1,\quad x_{ij}=0,1 \tag{31}$$

ただし， (32)

$$\bar{\alpha}_{ik}^{l}=\sum_{t=j_i(l)+1}^{n}\alpha_{kt}^{j} \tag{33}$$

3 連 記 投 票

本研究では順位をつけて複数の候補に投票する場合を考え，得られた順位別

投票データから各意思決定者の選好の組合せを反映するような連記投票モデルを提案する。

前述したように，単記投票では他の候補とは異なる「特別な候補・優れた候補」に票を投じる一方，連記投票は「ペアとして最適なもの」を考える方式だと言える。しかし通常の投票方式では，得票数や得票比率によって順位付けられ，投票者が望む組合せを反映しているとは言えない。投票者がどのような組合せを選択するかは，対象を様々な観点から評価した際の各観点での評価のバランスと観点の重要度の兼ね合いにより決まると考えられる。例えば欲しい車2台の連記投票を考える場合，「ブランド」や「デザイン性」にこだわりを持つ人は，多少価格が高く機能性に欠けてもこの2つの観点で評価の高い車を選択するかもしれない。一方，用途に応じて使い分けたいという人は「機能性」の高い車1台と「デザイン性」の高い車2台を選択するかもしれない。したがって，連記投票モデルの基本構造は，多数の観点から対象を評価し，観点の重要度と投票者の投票パターンを反映させるモデルだと考えられる。そこで，評価観点の分類（階層化），各評価観点からの対象の相対比較という2段階の評価をもとに総合順序付けする。

また総合評価をする際には，嗜好や考えが似たグループごとに評価をする方がよいと考えられる。車の例ならば，「デザインの優れたスポーツカー2台」を選択したグループと「アウトドア用のキャンピングカーと小回りのきく軽自動車」を選択したグループに分かれた場合，この2つのグループの順序付けを区別なくまとめ「スポーツカーとキャンピングカー」という案を得たとしても，誰も納得しないだろう

次の第3.1節では多数の観点から評価し，投票パターンを反映させる数理モデルを提案する。第3.2節では提案モデルにおけるウエイトの与え方を示す。第3.3節では提案手法の順序付けのプロセスを整理する。第4.4節では提案モデルの評価を行う。

3.1　連記投票モデル

Cook and Kress らの距離関数を用いた投票モデルは，投票者間の不一致度を最小にすることで合意形成を図るものであった。組合せの選好を考える連記投票モデルでは，このような方針のもと順序付けを行うのが望ましい。そこで Cook and Kress の相対距離関数に「観点」と「順位と観点に関するウエイト」を付加した次のようなモデルを提案する。

$$\max \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} w_{sjl}[<P_l^{+}(j), P_X^{+}(j)> + <P_l^{-}(j), P_X^{-}(j)>] \tag{34}$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{sjl}\left[\left(\sum_{t=j+1}^{n}\alpha_{it}\right)\left(\sum_{t=j+1}^{n}x_{it}\right)+\left(\sum_{t+1}^{j-1}\alpha_{it}\right)\left(\sum_{t=1}^{j-1}x_{it}\right)\right] \tag{35}$$

$$s.t. \tag{36}$$

$$\sum_{i}^{n}x_{ij}=\sum_{j}^{n}x_{ij}=1, \quad x_{ij}=0, 1 \tag{37}$$

順位に関するウエイト w_j を付加することで，投票者 $l(l=1, \cdots, m)$ が候補 $i(i=1, \cdots, n)$ をどの順位に投票したかという違いを表現できるようにしている。また，観点 $s(s=1, \cdots, t)$ を加えることで様々な評価基準のもとで評価が行えるようにしている。このようにすることで，組合せとしての違いを考える連記投票モデルになっていると考えられる。

3.2　ウエイト

3.2.1　階層分析法　AHP（Analytic Hierarchy Process）

手順

AHP では次のような手順に従って，代替案の総合評価を与える。

1．各評価基準に対して，代替案間の個別評価値を求める。
2．評価基準そのものの重要度を評価する。
3．各評価基準のウエイトの下で代替案の総合評価を与える。

1の代替案の個別評価値，2の評価基準の重要度はそれぞれ，代替案間（ある

いは評価基準間）の一対比較値からなる比較行列の主固有ベクトルから求められる。また3の代替案の総合評価は，1で得た個別評価値と2で得た評価基準の重要度の積和で与えられる。

例えば2つの評価基準の下で，3つの代替案の個別評価値を求める場合を考える。代替案 A_i は代替案 A_j に比べて a_{ij} 倍の評価値をもつとみなされるとき，$i, j=1, 2, 3$ に対して a_{ij} を行列の形に並べた比較行列は次式のようになる。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

同一対象は同一評価をもつので $a_{ii}=1$。A_i が A_j より a_{ij} 倍の評価をもてば，A_j は A_i の $1/a_{ij}$ の評価をもつので $a_{ji}=1/a_{ij}$。
この比較行列の主固有ベクトルが代替案 i の個別評価値 $u_i(i=1, 2, 3)$ になる。
同様に評価基準 C_1, C_2 の重要度 w_1, w_2 を求めると，代替案の総合評価 X_j は

$$[X_j]=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=w_1\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}+w_2\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{39}$$

で与えられる。

3.2.2 主固有ベクトルを用いた評価基準の重要度の導出

代替案の個別評価値，評価基準の重要度を比較行列の主固有ベクトルから求める妥当性は以下のようになる。

n 個の対象に対して一対比較を行った比較行列 $A=[a_{ij}]$ を作る場合，対象 i の真の個別評価値が u_i であれば，一対比較値 a_{ij} は $a_{ij}=u_i/u_j$ となる。したがって，比較行列は

$$A=\begin{bmatrix} 1 & u_1/u_2 & \cdots & u_1/u_n \\ u_2/u_1 & 1 & \cdots & u_2/u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n/u_1 & u_n/u_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

これよりこの最大固有値 $\lambda_{\max}$ は n（その他の値はすべて0）となり，$\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトル，つまり主固有ベクトル v は，$v=[u_1, u_2, \cdots, u_n]$ となることが容易にわかる。

このことは，比較行列 A に誤差がなければ，その主固有ベクトルが正しい答えを与えることを示している。そこで，多少の誤差があっても，A の主固有ベクトルの成分が真の個別評価値 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ に対する近似値を与えるであろうと考えるのである。

3.2.3　対数最小二乗法を用いた評価基準の重要度の導出

個別評価値を一対比較の幾何平均から求める方法もある。これは次の対数最小二乗法（LLS）の解析から与えられる。

一対比較のデータ a_{ij} は，その真の値 u_i/u_j にある正の値の誤差 e_{ij} を乗じたもの

$$a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}e_{ij} \quad (e_{ij}>0) \tag{41}$$

と考えられる。(41)式のモデルの下で $u_i(i=1, \cdots, n)$ を推定する場合，(41)式の対数をとって最小二乗法を適用する方法を対数最小二乗法（LLS）という。

(41)式の両辺の対数をとると，

$$\log a_{ij}=\log u_i-\log u_j+\log e_{ij} \tag{42}$$

となる。対数をドットで表すと，(42)式は

$$\dot{a}_{ij}=\dot{u}_i-\dot{u}_j+\dot{e}_{ij} \tag{43}$$

となる。$\dot{e}_{ij}$ は平均0，分散 σ^2 の分布をもつ，独立な確率変数と仮定する。

$n=3$ に対して，(43)式を $i, j=1, \cdots, 3(i<j)$ について列挙すると

$$\dot{a}_{12}=\dot{u}_1-\dot{u}_2+\dot{e}_{12} \tag{44}$$

$$\dot{a}_{13}=\dot{u}_1-\dot{u}_3+\dot{e}_{13} \tag{45}$$

$$\dot{a}_{23}=\dot{u}_2-\dot{u}_3+\dot{e}_{23} \tag{46}$$

となる。これに対して最小二乗法を適用するには，誤差の二乗和

$$S=\dot{e}_{12}^2-\dot{e}_{13}^2+\dot{e}_{23}^2 \tag{47}$$

$$=(\dot{a}_{12}-\dot{u}_1+\dot{u}_2)^2+(\dot{a}_{13}-\dot{u}_1+\dot{u}_3)^2+(\dot{a}_{23}-\dot{u}_2+\dot{u}_3)^2 \tag{48}$$

を最小にする $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ を求めればよい。$u_1u_2u_3=1$ と仮定し，この対数をとると

$$\dot{u}_1+\dot{u}_2+\dot{u}_3=0 \tag{49}$$

この(49)式の条件の下でラグランジュ法を用い，(48)式を最小にする問題を解く。ラグランジュ関数

$$L=S+\lambda(\dot{u}_1+\dot{u}_2+\dot{u}_3) \tag{50}$$

において，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2}=0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_3}=0 \tag{51}$$

と(49)式の連立方程式を解くと，$\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ の対数最小二乗推定は

$$\hat{u}_1=(a_{12}a_{13})^{\frac{1}{3}} \tag{52}$$

$$\hat{u}_2=(a_{12}^{-1}a_{23})^{\frac{1}{3}} \tag{53}$$

$$\hat{u}_3=(a_{13}^{-1}a_{23}^{-1})^{\frac{1}{3}} \tag{54}$$

(55)

となり，これが個別評価値の推定を与えることになる。これより，各 $\hat{u}_i$ は比較行列(38)の第 i 行の幾何平均となっていることがわかる[12]。

3.3 観点と順位のウエイト

3.3.1 観点のウエイト

AHP は，問題に含まれる要素を階層化し，各要素を主観的な判断で一対比較することで全対象の重みを求めて評価する方法である。そこで，計量化の難しい評価観点の重要度 w_s は，投票者が観点ごとに一対比較する AHP によって与える。

3.3.2 順位のウエイト

提案モデルにおける順位のウエイト w_j は，順位の高い候補の順序付けの一致度がよいほど，距離が短くなるような重み付けが望ましい。

提案モデルにおいて n 個の候補のうち，ある候補を第 i 位に順位付けた投票者Aと順位 j 位に（$i<j$）順位付けた投票者Bの内積は次式のようになる。

$$\sum_{j=1}^{n} w_j[<P_A^+(j), P_B^+(j)>+<P_A^-(j), P_B^-(j)>] \tag{56}$$

$$=\sum_{k=1}^{i-1} w_k+\sum_{k=j+1}^{n} w_k \tag{57}$$

例えば，ある候補を1位に順位付けた投票者と3位に順位付けた投票者の内積は w_4+w_5。2位に順位付けた投票者と4位に順位付けた投票者の内積は w_1+w_5 で与えられる。順位の高い前者の内積が大きい方がよいので，$w_4+w_5>w_1+w_5$ つまり $w_4>w_1$ の関係が成り立つ。これより，順位のウエイト w_j は $w_n>w_{n-1}>\cdots>w_2>w_1$ と単調減少する。

提案モデルでは，各順位の区分を強く明確にするため，順位比に応じた次のような重み付けを与える。

$$w_n=2w_{n-1}=\cdots=(n-1)w_2=nw_1 \tag{58}$$

3.3.3 観点のウエイトと順位のウエイトの統合

以上のように与えられた観点と順位のウエイトを次式のように統合し，ウエイト w_{sj} を与える。

$$w_{sj}=w_s w_j \tag{59}$$

$$\sum w_s=\sum w_j=1 \tag{60}$$

3.4 順序付けの手順

提案手法において，評価観点の階層化，各評価観点からの対象の相対比較という2段階の評価を経て総合順序付けるまでの手順を示す。

1．意思決定問題を，着目する評価観点の階層，対象の階層に分類する。

2．各評価観点の重要度 w_s を，評価者が観点ごとに一対比較する AHP により求める。

3．各評価基準において，m 人の評価者が対象を n 位まで順序付ける。

4．2で得られた評価観点の重要度と順位のウエイトの積をとり，観点と順位のウエイト w_{sj} を求める。

5．得られたウエイト w_{sj} と各観点の選好行列に連記投票モデルを適用し，対象の総合順序付けを行う。

4 結　　論

本研究では順位をつけて複数の候補に投票する場合を考え，得られた順位別投票データから各投票者の選好の組合せを反映するような連記投票モデルに取り組んだ。

対象を様々な観点から評価した際の各観点での評価のバランスと観点の重要度の兼ね合いから投票者の望む組み合わせは決まると考え，距離関数を利用した投票モデルを提案した。提案手法の有効性を検証するためにアンケートを実施して，提案手法が評価の良いもの悪いもの両面を考慮した中立な順序付けであることを確認している。また，事前に行った連記投票と提案手法の順序付けの比較を各投票者ごとに行い，連記投票と提案手法がある程度一致することを確かめている。これより，観点の重要度と各観点での評価のバランスの兼ね合いというモデルの基本的な枠組み，距離関数の適用が妥当であったと考えられている。しかしこれらの結果はここではのべていない。

さらに，選好の傾向の異なるグループ間の総合順序付けを行い，提案手法が両グループの選好の組み合わせを考慮したうえで，中立的な順位付けをしていることを確認し，提案手法が合意形成に適していることを示した。

本研究では，評価観点の分類（階層化），各評価観点からの対象の相対比較という2段階の評価をもとに総合順序付けを行った。しかし，観点ごとに対象

を順序づけるという作業や観点の一対比較が適切に行われないケースがある。さらに，問題によっては適切な観点の設定が難しい場合もありうる。そこで，評価観点を設けずに個々の対象の一対比較から総合順序付けを行う方法と今回の提案モデルを比較検討することが今後の課題である。この一対比較による順序付けには，Cook and Kress の「対象をもとにした距離関数（object based distance)」が利用できると考えられる。

一方，本研究ではウエイトの与え方が十分に検証されず，様々なウエイトをテストする中で中立点との関連性を示唆したにとどまっている。ウエイトの変化がどれほど結果に影響するかという感度分析をさらに進める必要がある。

Borda から始まった順序付けの研究は意外に少ない。しかし，試験の難易度を考慮した成績評価[8]や研究室配属における学生と研究室のマッチングを考えた順序付け[9]など興味深い研究もされている。世の中には多くの適用場面があり，より一層の研究の発展を願っている。

参 考 文 献

[1] J.M. Blin, A linear assignment formulation of the multiattribute decision problem, Review Automatique, Informatique et Recherche Operationnelle 10 (6) (1976) pp. 21-23

[2] Borda J.C.: Memoirre sur les Elections as Scruin, Histtoire de l'academie Royal des Sciences, (1781). english Translation by A. de Grazia, Isis, 44 (1953) pp. 42-51.

[3] Brans, J.P., B. Mareschal, Ph. Vincke: Promethee: A new family of outranking methods in multicriteria analysis. In: J.P. Brans (ed.): OperationalResearch'84 Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), (1984) pp 408-421

[4] Condorcet, M.: Essai sur l'Analyse, a la Probabilite des Decisions Rendues a la Pluralite des Voix, paris (1785)

[5] Cook, W.D, and M. Kress A data envelopment model for aggregating preference ranking, Management Science, Vol. 36, No. 11, (1990) pp. 1302-1310

[6] W.D. Cook, L. Seiford, Priority ranking and consensus formation, Management Scienece 24(16) (1978) 1721-1732

[7] Green, R.H., J.R. Doyle, and W.D. CookPreference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation, European Journal of Operational Research, Vol. 90, No.

3, (1996) pp. 461-472
[8] 保福一郎，大島邦夫，新たなランキング法を基とした大規模同一得点内におけるランキングベクトルの応用，日本オペレーションズ・リサーチ学会，2006年秋季研究発表会
[9] 片岡達，茨木俊秀，研究室配属問題の数理的考察，日本オペレーションズ・リサーチ学会，2006年秋季研究発表会
[10] J. G. Kemeny, L. J. Snell, Preference ranking: An axiomatic approach: Mathematical Models in the Social Sciences, Ginn, Boston, 1962, pp. 9-32
[11] M. Kendall, Rank Correlation Methods, third ed., Hafner, New York, 1955
[12] AHP の理論と実際・木下栄蔵　編著・日科技連
[13] Luce, R. D., Conjoint Measurement: A Brief Survey, in Bell, D. E., Kenny, R. L. and Taitta, H. (eds.), Conflicting Objective in Decision, John Wiley and Sons. (1979).
[14] 野口博司・石井博昭　多目的に評価されたランク別投票結果から DEA を用いて適切な総合順序付けを行う方法　流通科学大学論集　経済・経営情報編
[15] 小畑経史, 石井博昭,ランクつき投票モデルにおける MDS により候補者間の類似性評価
[16] 小川賢・石井博昭　多目的の順位別投票データの総合的解析　神戸学院経済学論集
[17] Roy, B.: Classment et choix en presence de points de vue multiples (la methode Electre). Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationnelle 8 (1968) pp. 57-75
[18] Roy, B., J.-Chr. Hugonnard: Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method. Transportation Research 16A (1982) pp. 301-312
[19] 「きめ方」の論理　社会的決定理論への招待・佐伯　胖・東京大学出版会 (1980)
[20] Y. Siskos, N. F. Matsatsinis, G. Baourakis, Multicriteria analysis in agricultural marketing: The case of French olive oil market, European Journal of Operational Research 130(2001) 315-331