

競合状況下における 施設の配置に関する意思決定

塩 出 省 吾

1. はじめに

競合する施設の配置問題はホテリング (H. Hotelling) の研究 ([10]) の導入的研究より始まり、その後さまざまなタイプの問題が研究された ([6])。初期の研究は地理学や経済学の研究が中心であったが、最近では政治学やオペレーションズ・リサーチの分野でこれまで扱われてきた問題が、この種の配置問題として表されることがわかり、注目を集めるようになってきた。例えば、選挙で当選するためには一時的なものかも知れませんが、候補者が有権者に対してどのような立場を取ればたくさんの票を獲得できるかを考えることになる。これを配置問題として考えるなら、各政策を表す空間において意見が分布している有権者に対してその数を重みとして、いかに多くの有権者に近い政策を打ち出すかということになる。また企業においては、従業員に適性検査を実施した結果を用いて、その技術能力を表す空間を考える。そのとき、空間の中に分布する従業員に対してバランスの良い割り当てを決めるのもこの種の問題と考えられる。施設配置問題というと“施設”という用語に制限されるように思われがちであるが、このようにさまざまな分野の問題が扱えるモデルであることがわかる。

2. ナッシュ均衡配置問題

ナッシュ均衡とはゲーム理論でよく用いられる均衡で、どのプレーヤーにとっても現在の手（解）を変えることによって利得が増えないような状態をいう。この状態ではどのプレーヤーも現在の手を変えようとしないので、そういう意味で均衡が保たれている。しかし、このような状態（すなわち均衡解）は必ずしもどのような場合にも存在するわけではないことがわかっている。

ナッシュ均衡のモデルとしては、非常に多くのモデルの基礎になっているホテリングのモデルについて簡単に述べる（[10]）。ある直線状で表される海水浴場に海水浴客が一樣に分布している場合を考える。この海水浴場に互いに競合する2人の互いに競合する業者がアイスクリームを売りにやってきたとする。どの客も値段が同じなら自分に近い方の業者からアイスクリームを買うとすると、どちらの業者もできるだけ売り上げを伸ばすためには相手よりも良い場所を選ばなければならない。海岸全体を区間 $[0, L]$ の線分で表すとする。2人の業者はまず、線分上の適当な位置 A, B でアイスクリームを売っている。それぞれの勢力は次の図1(a)でわかるように2点 A, B の中点を境にして分かれることになる。

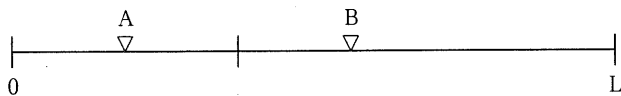


図1 (a)

このとき A と B は互いに接近し、次の図1(b)のように隣り合った状況になる。

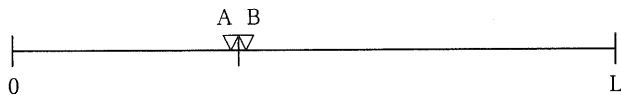


図1 (b)

この状態では明らかに B が有利なので A は B を飛び越えることになる。そのとき B が不利になるので、今度はさらに B が A を飛び越える。これを繰り返すと最終的には次のように海水浴場の真ん中、すなわち、線分 $[0, L]$ の中点 $L/2$ で隣り合う位置に配置することになる。

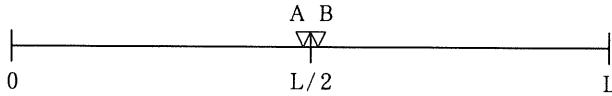


図1 (c)

この位置はどちらも現在の位置から移動することによって、これ以上現状を改善できないので、これ以上現在の場所を変えることはない。すなわち、この状態がナッシュ均衡解の意味で安定状態であるという。

ここに、さらにもう 1 人の業者 C がこの販売競争に参入してくると、C はなるべく多くの領域を獲得するために A の右または B の左に隣接して配置することになる。B の左に配置する場合は次のようになる。

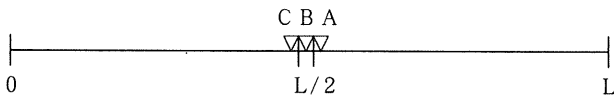


図1 (d)

このとき B は A, C 両業者に挟まれることになるのでまったく支配領域がないことになり、例えば A の右に飛び越えることで支配領域を獲得しようとする。今度は間に挟まれた A が同じことをするので、いつまでたっても安定した状態になることはない。すなわち、この 3 人の業者の場合はナッシュ均衡解が存在しないことがわかる。更に 4 人以上については、4 人と 5 人の場合についてはナッシュ均衡解が必ず存在し、6 人以上の場合にはナッシュ均衡解は無数に存在することが知られている。

再度 2 人の競合する業者の場合に戻って考える。上のモデルではアイスクリームの価格は同一と考えていたが、今度は業者によって価格が異なるとする。

競合状況下における施設の配置に関する意思決定

このとき、客は安くて近いのが望ましいのであるが、近い店は高く、遠い方は安いなら、価格と距離を天秤にかけることになる。そこでホテルリングのモデルでは単位移動の距離を価格に相当するとして、客は移動距離を変換した金額も含めた総価格の低い方の業者からアイスクリームを買うとする。ここで業者 A の価格が業者 B の価格より安いとすると、次の図 2 は客に対する総価格を表すグラフである。

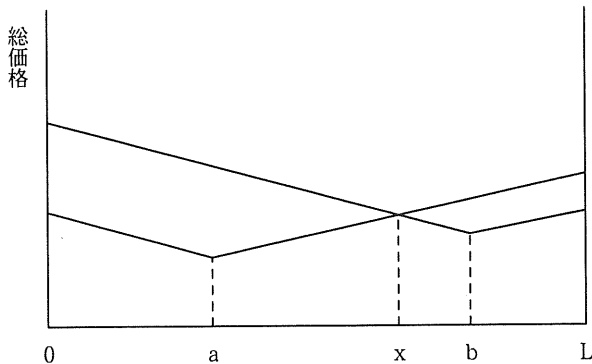


図 2. 価格を考慮したモデル

この図では A, B の支配領域はそれぞれ $[0, x]$, $[x, L]$ となる。ここで、客の総数を m とし、業者 A, B のアイスクリームの価格をそれぞれ p_A , p_B とすると、それぞれの売り上げ S_A , S_B は

$$S_A = \frac{mxp_A}{L}, \quad S_B = \frac{m(L-x)p_B}{L}$$

となる。それゆえ、2 人の業者 A, B の位置 a , b に対する最適価格はそれぞれ

$$\bar{p}_A = \frac{c(2L+a+b)}{3}, \quad \bar{p}_B = \frac{c(4L-a-b)}{3}$$

になる。これらを上の S_A , S_B に代入すると、 $\partial S_A / \partial a > 0$, $\partial S_B / \partial b > 0$ となり、両業者ともそれぞれ各自の売り上げを最大にするためには互いに相手の方に近づくことである。しかし $p_A < p_B$ であるから、あるところから A の総価格のグラフが B のグラフより下になり A が全領域を支配するようになる。これでは B

の売り上げがなくなるのでBはAから離れるように移動する。すなわち、AはBに近づき、BはAから離れることが繰り返され、この場合にはナッシュ均衡解は存在しないことがわかる。

ここでは、客が一様に分布している場合を考えたのであるが、分布が一様でない場合も、例えば価格差がない2施設の場合を考えても、中点は分布のメジアンで置き換えれば良いことは容易にわかる。

3. シュタッケルベルグ均衡配置問題

ナッシュ均衡配置問題におけるように、施設の再配置が無限に続くことは現実にはありえない。また一度で配置されるときもまったく同時に配置することもあまりないであろうし、ナッシュ均衡解は存在する保証もないのである。そこで配置に順序があり、後から配置する業者は先に配置する業者の配置を知って最適に施設を配置するという状況を考える。このとき先に配置する後から配置する業者になるべく多くの売り上げを確保できるように配置することになる。すなわち先手の業者の配置を知って最適に配置する後手の業者の配置問題（メジアン問題）と、後手の業者がそのように配置することを知った上でより多くの売り上げを確保するように配置する先手の配置問題（セントロイド問題）の2つのタイプの問題が考えられる。このセントロイド問題をシュタッケルベルグ均衡配置問題ともよび、ナッシュ均衡とは違った意味の均衡配置問題である（[2]）。

ここでもナッシュ均衡配置問題の場合と同様に直線市場を考える。先手のどのような配置に対しても後手の配置問題（メジアン問題）の解は先手の施設に隣接した点に施設を配置することが容易にわかる。そこでこの場合も先手の最適解としてはメジアンに配置することである。

4. 投票ルールの下での配置問題

競合状況下での配置としてグループによる施設の配置を決定する問題を考え

競合状況下における施設の配置に関する意思決定

る。例えば現在の事務所を新しい場所に移転するのに候補地が A, B, C の 3 箇所あるときに、候補地の順位とそれを選んだ人の割合を表にすると次の表 1 ようになる。

表 1. 候補地順位表

A	B	C	割合
1	2	3	x_1
1	3	2	x_2
2	1	3	x_3
2	3	1	x_4
3	1	2	x_5
3	2	1	x_6

ここで、 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1$ である。例えば $x_1=0.1$, $x_2=0.28$, $x_3=0.07$, $x_4=0.1$, $x_5=0.25$, $x_6=0.2$ とすると、A が一番良いと思っているのは全体の 38% で、B が一番良いと思っているのは全体の 32% で、C が一番の人は全体の 30% である。このとき多数決では A が選ばれるのであるが、52% の人は A より B が良いと思っているのである。さらに 55% の人は A より C が良いと思っているのである。すなわち、単記投票で選ばれる候補 A は実は B や C より過半数の人にとって好ましくないのである。単独で過半数の支持を得ているとこのような問題は起こらないのであるが、過半数の支持を得ていない場合の単記投票の危険性はフランス革命の時代の数学者コンドルセによってパラドクスとして指摘されている。コンドルセが考えたのは選挙における投票制度の問題点で、議員を選ぶときに単記投票で 1 人の議員を選ぶことは危険であることを明らかにしていたのである。コンドルセのパラドクスが生じないような位置、すなわち過半数の人にとって他にもっと良い候補地が存在しないような位置をコンドルセ点とよぶ。上の例では A はもちろんコンドルセ点ではありません。しかし、B について考えると B より C が良いと思う人は 58% おりますが、C については C より A が良いと思う人は 45% で C より B が良いと思う人は 42% であり、この場合は過半数がもっと良いと思う場所が他には存在しないので C がコンドルセ点である。

次にネットワーク上のコンドルセ点について考える。ここで、ネットワークとは有限個の頂点の集合とその2点を結ぶアークの集合からなるもので、利用者がネットワークの頂点にのみ存在するとき、利用者の過半数にとってより近い位置が他に存在しないような点がコンドルセ点である。今、ネットワークを N 、利用者の集合を U とし、各利用者 u の占める位置を S_u とすると、ネットワーク上の任意の点 u に対し、

$$|\{u: d(S_u, n) < d(S_u, c)\}| \leq \frac{|U|}{2}$$

を満たす点 c がコンドルセ点である。次の図3で表されるような例を考える。

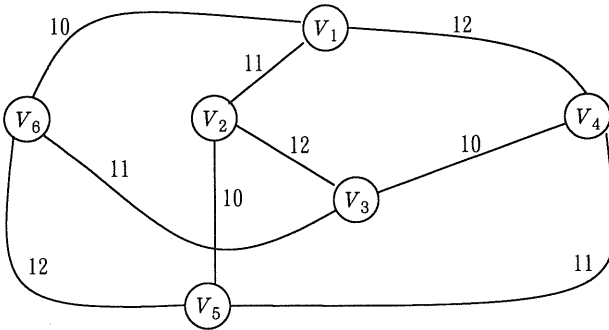


図3. ネットワークとコンドルセ点

この図において数字はそれぞれノード間の距離をあらわす。いま、3人の利用者 A, B, C がそれぞれ V_2, V_4, V_6 にいるとき、 V_2, V_4, V_6 の位置よりは V_1, V_3, V_5 の方がより多くの利用者の近くにあり、 V_1, V_3, V_5 の中では利用者 A と B にとっては V_1 より V_5 が近く、B と C にとっては V_5 より V_3 が近く、A と C にとっては V_3 より V_1 が近いことがわかる。これは、コンドルセ点が必ずしも存在するわけではないことを表している。実際、コンドルセ点の存在はネットワークの構造と利用者の分布に依存する。参考文献 [1] ではコンドルセ点が必ず存在するようなネットワークの構造について示されている。例えば、ネットワークが樹形状のとき、すなわち、2点間を結ぶ経路が1つしか存在しない

競合状況下における施設の配置に関する意思決定

ときは、利用者の分布に関係なくコンドルセ点が存在することがわかっている。すなわち樹形ネットワークのメジアンに配置することにより少なくとも半数の利用者に近いことがわかる。

コンドルセ点は民主主義における投票過程によって決まる点で有権者の過半数に近いような位置が他に存在しない点であるが、決定者が単独であるときに通常とられる1つの手段として、全利用者への距離の総和を最小にするような位置に施設を配置することがある。このような点をウェーバー点とよぶ。

ウェーバー点は配置問題においてこれまで最もよく研究されたものの1つである。もしネットワークが樹形状なら、ウェーバー点はコンドルセ点と一致することがわかる。ネットワークが樹形状であることはウェーバー点とコンドルセ点が一致するための十分条件であるが必要条件にはなっていない。樹形状でない場合においても、次の図4のような格子状ネットワークを考える。

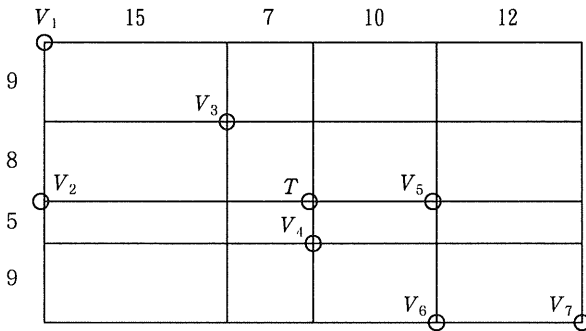


図4. 格子状ネットワーク

ここで、数字は各辺の長さを表す。利用者がに存在し利用者の分布は

表2. 利用者の分布

頂点	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
利用者	7	3	5	6	8	4	5

このとき、コンドルセ点もウェーバー点も T で一致することがわかる。

5. お わ り に

本論文では、競争状況下における施設の配置の意思決定について述べた。

まず、ナッシュ均衡を求めるホテリングのモデルについて述べ、ナッシュ均衡解はどのような場合にも必ず存在するものではないことを例をもって示した。次に、決定に先手後手の順序があり、後手は先手の決定情報を利用することができる場合を考えた。この場合の均衡解をシュタッケルベルグ均衡解とよび、シュタッケルベルグ均衡解は必ず存在することを述べた。

最後に、同等の権利を持つ複数の意思決定者が存在する場合における意思決定について述べた。この場合は、通常多数決によって決めるのであるが、真に過半数の利用者にとって良い場所が存在しない場合は、多数決によって選ばれた決定は過半数の利用者にとって望ましくないこともありうることを具体例でコンドルセのパラドックスとして示した。コンドルセ解は過半数の利用者にとって望ましい点であるが、そのような都合の良い点が必ずしも存在するわけではないことも示した。

参 考 文 献

- [1] Bandelt, H. -J., "Networks with Condorcet Solutions," *European Journal of Operational Research*, Vol. 20 (1985), pp. 314-326.
- [2] Drezner, Z., "Competitive Location Strategy for Two Facilities," *Regional Sciences and Urban Economics*, Vol. 12 (1982), pp. 485-493.
- [3] Eiselt, H. A., and G. Laporte, "Competitive Spatial Models," *European Journal of Operational Research*, Vol. 39 (1989), pp. 231-242.
- [4] Hakimi, S. L., "On Locating New Facilities in a Competitive Environment," *European Journal of Operational Research*, Vol. 12 (1982), pp. 29-35.
- [5] Hakimi S. L., "Locations with Spatial Interactions: Competitive Locations and Games," *Discrete Location Theory* (P. B. Mirchandani and R. L. Francis, eds.) (1990), pp. 439-478, John Wiley, New York.
- [6] Drezner Z., and H. W. Hamacher (eds.), *Facility Location: Applications and Theory*, 2nd Edition (2004), Springer Verlag.

- [7] Hansen, P., and J. -F. Thisse, "Outcomes of Voting and Planning: Condorcet, Weber and Rawls Locations," *Journal of Public Economics*, Vol. 16 (1981), pp. 1-15.
- [8] Hansen, P., J. -F. Thisse and R. E. Wendell, "Equivalence of Solutions to Network Location Problems," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 11 (1986), pp. 672-678.
- [9] Hansen, P., J. -F. Thisse and R. E. Wendell, "Equilibrium Analysis for Voting and Competitive Location Problems," *Discrete Location Theory* (P. B. Mirchandani and R. L. Francis, eds.) (1990), pp. 479-501, John Wiley, New York.
- [10] Hotelling, H., "Stability in Competition," *Economic Journal*, Vol. 30 (1929), pp. 41-57.
- [11] Karkazis, J. "Facility Location in a Competitive Environment: A Promethee Based Multiple Criteria Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol. 42 (1989), pp. 294-304.
- [12] Labbe, M., "Outcomes of Voting and Planning in Single Facility Location Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol. 20 (1985), pp. 299-313.
- [13] McKelvey, R. D., and R. E. Wendell, "Voting Equilibria in Multidimensional Choice Spaces," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 1 (1976), pp. 144-158.
- [14] 西平重喜, 統計でみた選挙のしくみ: 日本の選挙・世界の選挙, 講談社ブルーバックス (1990).
- [15] Wendell, R. E., and R. D. McKelvey, "New Perspectives in Competitive Location Theory,"