ワルラスの法則にしたがう価格調整方程式のカオスについて

齋藤誠慈*
石井博昭*

本論文では，ワルラス経済理論における財の需要・供給量から決まる超過需要関数を，森嶋 [1] に従って述べる。第2章では，価格は一定単位期間ごとに変動観測されるモデルにおいて，財が交換流通する市場における超過需要関数から価格調整差分方程式を導く。最後に，2次元離散力学系における森嶋の例におけるカオスを論じて，多次元力学系におけるカオス判定法の問題点を述べる。

1. 超過需要関数

L. ワルラス（1834-1910，スイス）は，すべての個人が価格を所与とみなすような交換経済に関心があり，一般均衡理論を研究した（[1]）。非負の実数の集合を $R_+=\{0\leq x<\infty\}$ として，R^n_+ はその直積集合を表す。各個人の初期保有する n 種類の財の量を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T\in R^n_+$，価格ベクトルを $p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ で表す。T はベクトルの転置を示す。ワルラスの法則の下で，財は最終的に相対価格を取り扱う。ワルラスの交換理論の主な目的は，価値があり交換可能な全ての物は有用であり量において限られている，その逆も真であるという見解を立証することであった。価格がゼロであるときに個人が必要とする財の量に注目し，その量を財の外延効用（extensive utility）とよび，通常有限であると仮定した。「もしも商品が有用でなくなり，また有用であっても量において

＊大阪大学 大学院情報科学研究科 情報数理学専攻

無限となれば，それはもはや稀少でなく，交換価値をもたない」と考えるのである。十分，完全に組織化された市場における競争とは，仲買人や売買の仲介者などが集まって競売が行われる場所で，いかなる交換も条件が公にされることを意味し，売手は互いに高く，買手はできるだけ安く，売り買いすることを前提とする。

ワルラスの法則とは次のことを意味する：市場における財jの総需要量D_jは，すべての個人に関するd_jの総和であり，財jの総需要量S_jは，すべての個人に関するs_jの総和であるとして，価格pの関数である：

（1） $D_j=D_j(p),\ S_j=S_j(p)\ (j=1,2,\cdots,n)$

需要供給量の差D_j-S_jは，総外延効用量X_jと初期の外延効用量X_j^0の差

（2） $D_j-S_j=X_j-X_j^0$

に等しいと仮定する。特に，需要・供給量の差を**超過需要関数**とよび，$f_j(p)=D_j-S_j$である（$j=1,2,\cdots,n$）。超過需要関数$f(p)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$と価格$p$の内積はゼロであり，これを**ワルラスの法則**という：

（3） $(f,p)=(D-S,p)=0$

ただし，$D=(D_1,D_2,\cdots,D_n)^T$, $S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)^T$は各々，財xの総需要量と総供給量である。相対価格とは，例えば，第k番目の財の価格を$q_k=p_k/\sum_j p_j$とすることである。ゆえに，次の有界性と正規性が成り立つ：

（4） $0\leq q_k\leq 1;\ \sum_j q_j=1$

さらに，超過需要関数$f=D-S$は，**0次同次的**，すなわち，

（5） $f(cq)=f(q)$ for $c>0$

と仮定されることがある。ベクトルqが相対価格であることを考慮すればよい。

超過需要関数が$f(q^*)=0$であるとき，$q^*\in R_+^n$をfの**平衡点**とよぶ。この価格において，需要と供給が等しくなり，価格の変動がないのである。平衡点の集合を

$$P=\{q^*\in R_+^n : f(q^*)=0\}$$

と表す。

2.　価格調整差分方程式

一定時刻ごと $t=0, 1, 2, \cdots,$ の競争取引を考える。価格 p に対する第 j 財の超過需要に関して，次の仮定を課す：

(a)　需要＞供給のとき，競売人は $f_j(p(t))$ と $\sum_k v_{jk} p_k(t)$ とに比例して，その比例係数は v_{jk} として，価格を上げる。

(b)　需要＜供給のとき，逆に競売人は価格を下げる。

このようにして，時刻 $t=0, 1, 2, \cdots,$ における第 j 財の価格調整差分方程式は，次のように得られる。

（6）　$p_j(t+1)-p_j(t)=f_j(p(t))\sum_k v_{jk} p_k(t)$

価格は非負より，次の条件が成立しなければならない。

（7）　$p_j(t)+f_j(p(t))\sum_k v_{jk} p_k(t)\geq 0\ (j=1, 2, \cdots, n;\ t=0, 1, 2, \cdots)$

価格を相対価格 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)^T$ に換えて，$v_{jk}=v_j$ として議論をすすめる。

（8）　$q_j(t+1)=\dfrac{\max[q_j(t)+v_j f_j(q(t)),\ \ 0]}{\sum_{k=1}^{n}\max[q_k(t)+v_k f_k(q(t)),\ \ 0]}(=F_j(q(t)))$

なお，$f(p)=f(q)$ として置き直している。次の性質は容易に確かめられる：

（i）　正規式：$\sum_k q_k=1$;

（ii）　非負・有界性：$0\leq q_k\leq 1$；

（iii）　ワルラスの法則：$(q, f(q))=0$

差分方程式(8)の不動点をワルラス均衡点とよぼう：

$$q=F(q)=(F_1,\ \ F_2, \cdots,\ F_n)^T$$

まず，ワルラス均衡点の存在について述べる。$P\neq\phi$（空集合）のとき，ワルラス均衡点の集合も空でない。また，ブラウワーの不動点定理：「有限次元空間 R^n 内の有界閉の凸集合 S 上で定義される連続関数 g が，中への写像：$g(S)\subset S$ ならば，g は S の中に少なくとも1つの不動点 y：$g(y)=y$ をもつ」（例えば，［2］参照）。$S=\{q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)^T : 0\leq q_j\leq 1,\ k=1, 2, \cdots, n\}\subset R^n$ は有界閉の凸集合で，$g(q)=F(q)$ は中への連続関数であるから，少なくとも1つの

不動点をもつ。$\exists q \in S : F(q) = q$。

次にワルラス均衡点 q において，超過需要関数は

(9)　$f_j(q) = 0\,(q_j > 0)\,;\,f_j(q) \leq 0\,(q_j = 0)$

であることが示される [1]。相対価格が変動しないとき，次のように解釈できる：

(i)　$q_j > 0$ である稀少財については，需要＝供給である。

(ii)　$q_j = 0$ である自由財については，供給が需要以上である。

3.　森嶋の例と多次元離散力学系のカオス

森嶋の例を考える [1]。超過需要関数 $f(p) = (f_1(p), f_2(p))^T$, $p = (p_1, p_2)^T$, は，次式である：

(10)　$$f_1(p) = \frac{-p_1 + \frac{5p_2}{3}}{p_1 + p_2},\quad f_2(p) = -\frac{p_1 f_1}{p_2}$$

正規化する：

(11)　$q_j = p_j / (p_1 + p_2)$

(12)　$$f_1(q) = \frac{5 - 8q_1}{3},\quad f_2(q) = -\frac{q_1 f_1(q)}{1 - q_1}$$

価格伸縮度を $v_k = 1$ とおくと式(8)は，$q(t+1) = (q_1(t+1), q_2(t+1))^T$ に関する価格調整差分方程式は次のとおりである：

(13)　$$q(t+1) = \frac{1}{\max[q_1(t) + f_1(q(t)), 0] + \max[q_2(t) + f_2(q(t)), 0]} \times \begin{pmatrix} \max[q_1(t) + f_1(q(t)), 0] \\ \max[q_2(t) + f_2(q(t)), 0] \end{pmatrix}$$

式(11)より，$q_1(t)$ だけに注目すればよいので，

$$q_1 = r$$

とおいて議論する。$r \leq 1 \Leftrightarrow r + f_1 \geq 0$，また $0 \leq r < 1$ の下で $q_2 + f_2 = (11r^2 -$

$11r+3)/3(1-r)>0$ から次式を得る：

(14) $$r(t+1)=\frac{5(1-r(t))^2}{16r(t)^2-21r(t)+8} \quad (=h(r(t)))$$

ここで，$s=1-r$ とおくと，$h(r)=5s^2/(16s^2-11s+3)$ となる。不動点 $q^*=(q_1^*, q_2^*)^T$ を求めるために，$h(r)=r=1-s$ を解く。$5s^2=(16s^2-11s+3)(1-s)$ を展開して因数分解すると $(8s-3)(2s^2-2s+1)=0$ となる。よって，$q_1=1-s$, $q_2=s$ より，実ベクトルの不動点は，ただ一つ定まる。

(15) $$q_1^*=r=\frac{5}{8}=0.625, \quad q_2^*=\frac{3}{8}$$

式(13)の2周期点は，$q=(0.25, 0.75)$，$(0.75, 0.25)$ である（図1を参照）。一般に r を正整数として，c が関数 $f: R^n \to R^n$ の r 周期点とは，合成写像 $f(c)$，$f^2(c)=f(f(c))$，…，$f^{r-1}(c)$ は相異なり，しかも $f^r(c)=c$ となる点をいう。

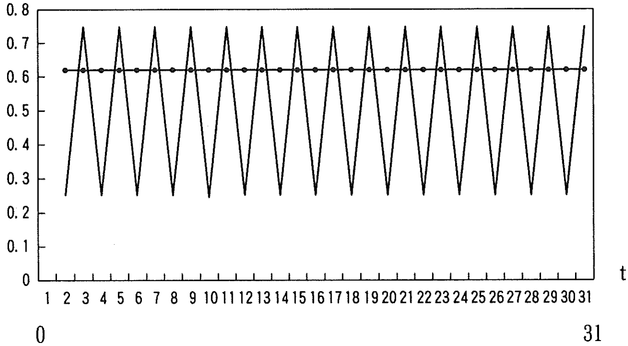

図1　横軸は反復 $t=0, 1, \cdots, 31$，縦軸は差分式の値 $r(t+1)=h(r(t))$ を表す。初期点 $r(0)=0.625$ の軌道は，一定である。初期点 $r(0)=0.25$ の軌道は，0.75との2点を周期的に移動する。

差分方程式(13)において，初期値のわずかな差異が，反復を重ねるに従って，やがては全く異なる2つの挙動を示すような性質を「初期値鋭敏性」といい，カオスを特徴付ける（図2を参照）。

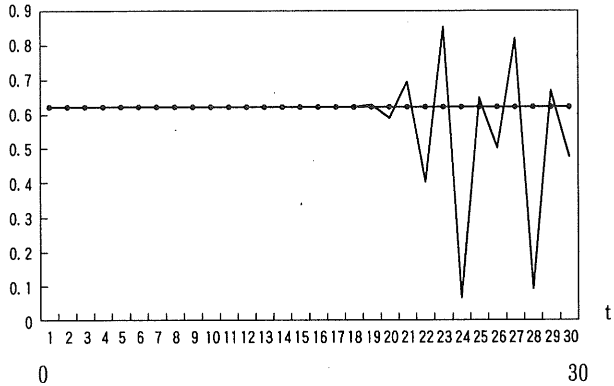

図2　式（14）に関し初期点が $r=0.625$ と0.625000001の軌道は，
$t=18$ 以降，全く異なる挙動を示す。

初期値鋭敏性の他に，カオスを特徴付けには，「周期点の集合が稠密であること」，「位相的推移性」などがある（[4] を参照)。式(14)のカオスについて，1次元離散力学系に関する「リー・ヨークのカオス」を判定する定理を次に述べる（[5])：

「閉区間 $I=[0, 1]$ の連続関数 $y=f(x)$ が，中のへの写像：$f(I)\subset I$ で，3周期点をもつならば，f はリー・ヨークのカオスである」。この定理を式(14)に対し適用可能か確かめよう。図3，4では，横軸 r は数直線の部分区間 [0, 1] を，次のグラフの交点の存在を示している：

$T: y=r$

$r1: y=h(r)$

$r2: y=h(h(r))=h^2(r)$

$r3: y=h^3(r)$

$r8: y=h^8(r)$

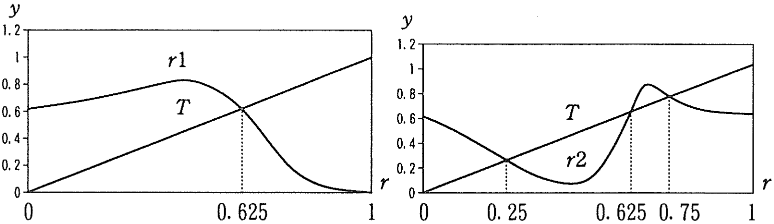

図3　左図において T と $r1$ の交点は不動点0.625で，右図では，T と $r2$ の交点は0.25と0.75の2周期であることを示す。0.625は2周期点ではない。

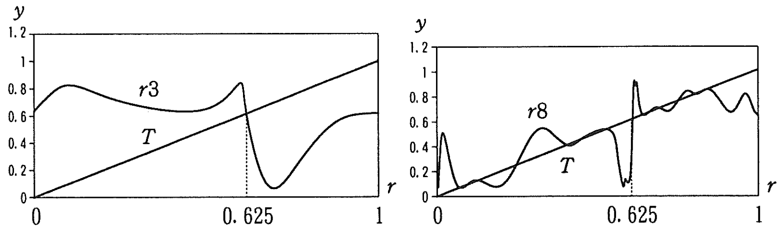

図4　左図では，T と $r3$ は不動点以外では交わらない，右図では T と $r8$ の交点は複数あることを示す。

3周期点は，T と $r3$ の交点であるが，数値計算の結果からは，それらは交点をもたない。よって，3周期点の存在は確認できないから，リー・ヨークの定理は適用できない。しかし，図2が示すように，カオスのもつ初期値鋭敏性があるとも思われる。また，[1] では，初期点が不動点0.625付近の $r(0)=0.62$ から，あるいは2周期点0.25付近の $r(0)=0.24$ から出発する軌道は不安定であり，やがては8周期点（T と $r8$ との交点のいずれか）に近づくと述べている。価格調整差分方程式(8)には，パラメータ v が含まれて，「複雑系」の問題としてアプローチがされている [3]。

差分方程式(14)では，価格伸縮度 $v_1=v_2=1$ と仮定しているので，式(8)においてパラメータを換えて，3周期点の存在を数値シミュレーションによって確認する。その結果，リー・ヨークの定理を適用することにより，（リー・ヨークの）カオスの存在が肯定できる。差分方程(8)において，例えば $v_1=0.4$, $v_2=1.3$ とおく．この場合，財1の超過需要が価格変動に与える影響が，財2の超過需要

の影響に対して比が 4/13，逆にいえば，財 2 が需要・供給量の差が，財 1 の価格変動に対して，5 倍弱だけ影響が大であれば，財 1 の価格は予測しがたいカオスの状況が予想されることを意味する。実際に，図 5 のように，この場合，グラフ T と $R3$ の交点が存在するから，リー・ヨークの定理が応用できる。

$$r(t+1)=q_1(t+1)=\frac{\max[r(t)+0.4f_1(r(t)),\ 0]}{(\max[r(t)+0.4f_1(r(t)),\ 0]+\max[1-r(t)+1.3f_2(r(t)),\ 0])}\ (=g(r(t)))$$

$$q_2(t+1)=\frac{\max[r(t)+1.3f_2(r(t)),\ 0]}{\max[r(t)+0.4f_1(r(t)),\ 0]+\max[1-r(t)+1.3f_2(r(t)),\ 0]}$$

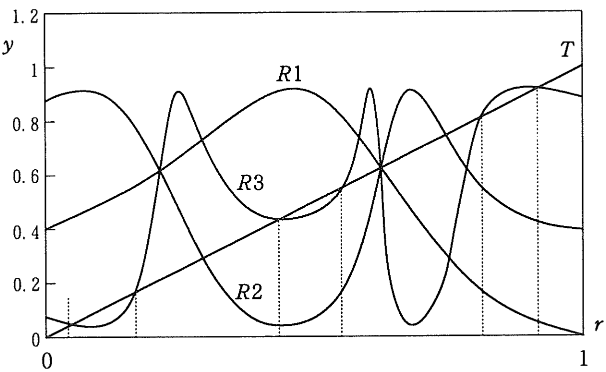

図 5　グラフ $T; y=r$, $R1: y=g(r)$, $R2: y=g^2(r)$, $R3: y=g^3(r)$ の挙動を示す。T と $R3$ の交点は，関数 $y=g(r)$ の 3 周期点を意味する（破線で示された値）。

以上，2 次元離散力学系の森嶋の例 [1] において，価格伸縮度のパラメータを考慮したときにカオスが出現する場合である。この例では相対価格 $q=(q_1, q_2)^T$ は $q_1+q_2=1$ をみたすから，実際は 1 次元離散力学系と変わらない。

多次元離散力学におけるカオス判定法には，Marotto の定理がよく知られている（[6], [7]）。ベクトル値関数 $F: R^n \to R^n$ の不動点 $F(z)=z$ に関して，そのヤコビアン $\partial F(z)/\partial z$ の固有値の絶対値がすべて 1 より大きいときに適用可能である。しかし，初期値鋭敏性を有する写像は，これればかりとは限らない。

Gumowski-Mira（グーモウスキ・ミラ）の写像（[8]）は，次の式で与えられ

る差分方程式で3種類のパラメータの与え方によって，Marotto の定理の条件がみたされないことがある。

$$x(t+1)=y(t)+4a(1-b[y(t)]^2)y(t)+\mu x(t)+\frac{2(1-\mu)[x(t)]^2}{1+[x(t)]^2} \quad (=F_1(x,y))$$

（16）

$$y(t+1)=-x(t)+\mu x(t+1)+\frac{2(1-\mu)[x(t+1)]^2}{1+[x(t+1)]^2} \quad (=F_2(x,y))$$

(a, b, μ は定数，$|\mu|\leq 1$)

$a=0.008$，$b=0.05$，$\mu=-0.9$ のとき，初期値を $(0.1,0)^T$ から出発する軌道 $(x(t),y(t))^T$ を，$t=102$ から $t=10102$ までを平面上に描くと図6のようになる。

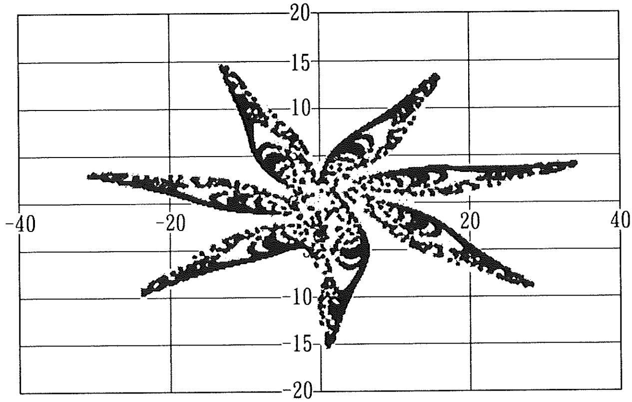

図6　式（16）において，$a=0.008$, $b=0.05$, $\mu=-0.9$ の場合を，$t=102$ から10102までプロットした。
「グーモウスキ・ミラの翼」として知られている。

式(16)の $F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))^T$ に関してパラメータに無関係な不動点 $z=(x,y)^T : F(z)=z$ は2点 $z=(0,0)^T$，$(1,0)^T$ で，他にもパラメータに依存する2点が生ずることがある。原点におけるヤコビ行列 $\partial F(0)/\partial z$ の固有値 λ_0 は，絶対値が1より小となることが，数値シミュレーションによって確

かめられる。$a=0.008$, $b=0.05$ を固定する。μ を -0.89 から -0.995 における固有値 λ_0 は虚数で，その絶対値の値を表1に示す。

表1

μ	-0.89	-0.90	-0.91	-0.92	-0.93	-0.94
$\lvert\lambda_0\rvert$	0.986962596	0.981423836	0.977147309	0.974194949	0.972624698	0.972489645
μ	-0.95	-0.96	-0.97	-0.98	-0.99	-0.995
$\lvert\lambda_0\rvert$	0.973837215	0.976708461	0.98113748	0.987150983	0.994768039	0.999181747

今後は，多次元離散力学系において，不動点 z に対する $\partial F(z)/\partial z$ の固有値の絶対値が1より小のときのカオス判定法の検討が必要である。

参　考　文　献

[1] 森嶋道夫：ワルラスの経済学，西村和雄 訳，岩波書店，1977。

[2] D. R. Smart, "Fixed Point Theorems," Cambridge Univ. Press, 1980.

[3] 森嶋通夫：均衡・安定・成長（森嶋通夫著作集2），岩波書店，1977。

[4] S. Elaydi: "Discrete Chaos," Chapman & Hall/CRC, 2000.

[5] T. V. Lee, J. A. Yorke: "Period Three Implies Chaos," Amer. Math. Monthly 82(1975), 985-992.

[6] F. R. Marotto, "Snap Back Repellers Imply Chaos in R^n," J. Math. Anal. Appl. 63(1978), 199-223.

[7] 森田善久，"生物モデルのカオス"，朝倉書店，1996.

[8] I. Gumowski, C. Mira, "Recurrences and Discrete Dynamic Systems," Lec. Note in Math. 809, Springer-Verlag, 1980.

[9] 川上博，"カオスCGコレクション"，サイエンス社，1990。