選ばれる側と選ぶ側の論理

石　井　博　昭

1. は　じ　め　に

この研究は神戸学院大学　塩出教授，毛利助教授等のプロジェクトの一環と行われたもので，特に本年1月末に鳥取で行われた泊り込みのミーティングでの議論を踏まえてまとめたものである。この原稿は3月初旬から半ばまで石井が中華人民共和国黒龍江省ハルピンでハルピン工業大学理学部数学科にお世話になって招待講演をする合間に書き出したものである。石井のところに同大学陳明浩先生がサバティカルでこられてからのお付き合いでもう5，6年前から，ほぼ毎年1回訪問して交流を深めている。私が客座教授に任命されてからは訪問が“義務化”し，スタッフの先生方，学生にオペレーションズ・リサーチ関連の話題を私の研究を中心にお話している。その間，呉教授，游理学部長が来日されるなど親密な関係を保っている。特に，呉教授は中国におけるファジィ数学の大御所で，私もファジィ最適化を専門にしている関係で親しくさせていただいている。3月のこの時期でもハルピンは大変寒く，1日中零下の日が続いている。朝は針での治療で午後からは毎日，陳先生を初め数学科のメンバーと私の研究を“肴”に議論をしている。陳先生は日本語が上手であるし，漢字圏ということもあってなんとか意思疎通ができている。日本の数学科と違うのは皆応用数学に関心があり，実際問題に自分の専門分野を適用したいと思っている点である。私が数学科で講演など日本ではとんでもない話なのであるが，皆どうしてそのように適用分野をみつけるのか質問されるぐらいである。田波平助教授はファイナンス数学を研究していて，中国の金融マーケットに適用し

たいと思っていると話してくれた。

たまたま，数学科の主任を選ぶ選挙はあるらしく，誰が選ばれるか非常に興味を持っている。しかしよく聞くと選挙結果は参考で実際はもっと上部の意向で決まられようとする点に不満を抱いている。今のところ何とか選挙結果に基づいて主任が決まっているようであるが，これは結果が圧倒的であるため，無視できないのだとのことである。ここでお話する我々の研究は実際には適用されていないが，やはり数理的にきっちりルールを決めないといけないと実感したしだいである。もちろん，選ばれる側の論理として選挙結果の公平性，透明性は大事であるが，その目的を考えると選ぶ側としては単なる人気投票ではなく，本当に役立つ人を選びたいと思うのは当然である。例えば，オリンピックのある種目の出場選手を決めるときなどで，複数派遣できるときは非常に選考が難しい。選ばれる側は４年後には選手生命がなくなっているかもしれないのでなんとしても選ばれたいと思うが，選ぶ方は費用をたくさんかけて国を代表して参加させるのでできるだけメダルそれも金色のをとってきてほしい。このようにスポーツは選ばれる論理，選ぶ側の論理をどう折り合いをつけるかという問題の宝庫である。もう１つの例を挙げれば，サッカーの11人の選手を選ぶのに，選手のポジションに関する選好と監督としての総合力の最大化がある。

１人を選ぶ場合については神戸学院の小川先生の研究成果がこの論集にすでにでているが，そこからの発展を試みるのがこの拙稿の意図するものである。小川先生を超えることができるか自信はありませんが。

２章では簡単に投票データに基づく意思決定についておさらいをする。次に３章で複数選択のときの投票モデルとその選択方法について一考察を与える。4章ではその応用可能性とこれらの妥当性も含めて総括するとともにこれからの発展性について議論する。

2. おさらい

投票データに基づく意思決定のこれまでの我々の研究をおさらいする。基本

的には包絡分析法（Data Envelopment Analysis，略して DEA）から派生したもののように考えられているが，遠く1781年 Borda の “Method of Marks” に始まっている。

事業体は資源を使用し効率的に各種の成果をより多く産出することを追求している。このとき事実に基づく知識と経営効率化を図る数理的手法による客観的分析が必要である。DEA は学校や組織など多入力多出力系の効率性評価に用いられている。何でも評価のご時勢であるが，研究者として公平公正な評価は非常に困難であることがわかってくると安易なやりかたの現状には寒気がする。DEA を説明するのが目的ではないので詳しくは小川氏の先駆的博士論文［6］を参照されたい。

ある目的で複数の対象から一番適切なものを選択する状況を考える。このため n 人が m 個の対象に対して自分の選好に従って k 位まで順に投票する。その結果から対象の順位付けを行い，1位の対象を選択する。y_{ij} を対象 j が i 位として得た得票数とする。このとき，各対象 j に有利な重み付けを探す以下の m 個の線形計画問題 P_j, $j=1, 2, \ldots, m$ を解く。ここで w_{ij} は y_{ij} に対する重みである変数であり，θ_{jq} は対象 j に有利な重み付けをするときの対象 q のスコアーである。

$$P_j\text{: max} \quad \theta_{jj} = \sum_{i=1}^{k} w_{ji} y_{ji}$$

$$\text{subject to} \quad \theta_{jq} = \sum_{i=1}^{k} w_{ji} y_{qi} \leq 1, \quad q = 1, \ldots, m,$$

$$w_{j1} \geq 2w_{j2} \geq 3w_{j3} \geq \cdots \geq kw_{jk}, \quad w_{jk} \geq \frac{1}{(k+\cdots+1)\times n}$$

最後の制約は Green が考えた上位の票には下位より大きい重みをつけるという制約

$$w_{ji} - w_{ji+1} \geq 0, \quad w_{j1} \geq w_{j2} \geq \cdots \geq w_{jk} \geq 0$$

の持つ問題点を克服するために我々が提唱した条件である。例えば，1位と2位の重みの差は2位と3位との重みの差より大きくなければならないと思うが，

彼らの条件ではそれが保証されない。また，情報という観点からは w_{jk} も正であるべきである。そうでなければ情報を失っていて，データをそこまで取った意味がなくなる。これも彼らの条件では保証されない。P_j での最適値を θ_{jj}^*，このときの最適解を w_{ji}^* として対応する他の対象のスコアを $\theta_{jq}^* = \sum_{i=1}^{k} w_{ji}^* y_{qi}$ とする。そしてこれらの幾何平均 $\theta_j^* = \sqrt[m]{\Pi_{s=1}^{m} \theta_{js}^*}$ $j=1, 2, \ldots, m$ をおのおの計算し，この中で最大を与える $j=j^*$ が1位となり選択される。

3. 複数選択のときの意思決定

これまでのモデルでは1人を選ぶので，選ばれる側の論理だけを考えて，公平さのみを追求すればよかったのであるが，2人以上の時はオリンピックの代表選手の選出のようにメダルをとることも重要な要素となるので，効果が大きいことも考える必要がある。すなわち，選ぶ側の論理も重要である。このためにはできれば，複数の基準を考えて選ぶ方がよいと思われる。もちろん単独選出のときもそうではあるので，まずこの拡張から考えていく。

（評価カテゴリーが複数に及ぶ場合の投票モデル）

投票の際の評価カテゴリーが1つのときは Cook & Kress の投票モデル [2] によってデータの解析ができるが，評価カテゴリーが複数あるときは各カテゴリーでのデータを同時に解析することはできない。そこで，各カテゴリーのデータを結合させた上で Cook & Kress の投票モデルを用いることが必要になる。ここでは，どのカテゴリーを優先させるか決められない場合を考え，カテゴリー間の優先度をすべての場合について仮定し，その条件の下で得られたポイントの幾何平均を最終的なポイントとする方法を示す。

投票者が，1カテゴリーあたり対象1つを記入できる場合，すなわち1カテゴリーあたり1位までを記入できる場合をまず考える。

順序付けの手順は以下のようである。都合上今までと記号を変えている。

1. n 人の投票者が，h 個あるカテゴリーそれぞれに最もふさわしいと思う対象1個ずつ選んで投票。

2．各カテゴリーの優劣をすべての場合（$h!$ 通り）について仮定し，Cook & Kress の投票モデルを用いて候補 i ごとに自分に一番有利なウェイトと W_{il} そのウェイトを適用させたときのポイント z_{ii} を求め，さらにほかの候補のウェイトを適用したときのポイント z_{iq} を求めて $m\times m$ 行列に配し，その列和の幾何平均をとり Z_i とする。

3．候補ごとに $h!$ 通り個あるポイントの幾何平均をとり，最終的なポイント Z_i^* とし，この大小により対象の総合順序付けを行う。

評価カテゴリー1，評価カテゴリー2，と h 個あるカテゴリーの内，あるカテゴリー l において，n 人の投票者が m 個の対象からふさわしいと思うものを1つ選んで投票したとき，その対象 i が得たカテゴリー別得票数に対してもっとも好都合なウェイト W_{il} を決定する方法は見かけ上2章と同じようになる。

$$z_i=\max\sum_{l=1}^{h} W_{il}v_{il} \quad (i=1, 2,\dots, m) \tag{3.1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{l=1}^{h} W_{il}v_{ql}\leq 1 \quad (q=1,\dots, m),$$

$$W_{i\pi(1)}\geq 2W_{i\pi(2)}\geq\cdots\geq hW_{i\pi(h)}\geq\frac{2}{nh(h+1)}$$

ここで，$\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(h)$ は $\{1,2,\dots,h\}$ の置換であり，すべての場合についての z_i を求める。例えば $h=3$ のときは，$\{\pi(1), \pi(2), \pi(3)\}$ の組み合わせは $\{1,2,3\}$，$\{1,3,2\}$，$\{2,1,3\}$，$\{2,3,1\}$，$\{3,1,2\}$，$\{3,2,1\}$ の6通り存在する。

この線形計画問題を解き，候補 i に一番有利なウェイトを求め，ほかの候補にもそれを適用させる。候補 i の獲得票に対して候補 $q\,(q=1,2,\dots,m)$ のウェイトを適用させたときのポイント z_{iq} は次式(3.2)のようになる。

$$z_{iq}^T=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1h} \\ W_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ W_{m1} & & & W_{mh} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{ih} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

z_{iq} $(q=1,2,\ldots,m)$ の幾何平均がポイント Z_i となる。Z_i は次式(3.3)のようになる。

$$Z_i=\left(\prod_{q=1}^{m} z_{iq}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.3}$$

式(3.1)における制約条件の第三式のすべての場合について Z_i を求める。ある場合を p $(p=1,2,\ldots,h!)$ としたときの Z_i を Z_{ip} とすると，それらの幾何平均 Z_i^* は以下の式(3.4)で表される。

$$Z_i^*=\left(\prod_{p=1}^{h!} Z_{ip}\right)^{\frac{1}{h!}} \tag{3.4}$$

これが最終的な候補 i のポイントとなり，この大小によって順位付けを行う。

少し例を与える。表 3.1 に示す投票データに適応し，1 位を決定する。表 3.1 のデータは，70人の投票者が 3 種類（F1,F2,F3）あり，それぞれに優劣をつけられない評価カテゴリーごとに最もふさわしいと思う候補を 4 候補(D1,D2,D3,D4）の中から唯一つを選択し投票するとした仮想的データである。

表 3-1：カテゴリーごとに 1 候補選んで投票する場合の投票結果データ

	F1	F2	F3	合計
D1	20	18	24	62
D2	36	9	10	55
D3	10	3	18	31
D4	4	40	18	62

各候補の獲得票の合計を見ると，D1 と D4 が同数の票を獲得しており，D2 がそれに続いている。今回の場合評価カテゴリーが 3 種類なので，各カテゴリーに対するウェイトの制約のパターンは

$W_{i1}\geq 2W_{i2}\geq 3W_{i3}\geq 1/1470$，$W_{i1}\geq 2W_{i3}\geq 3W_{i2}\geq 1/1470$，

$W_{i2}\geq 2W_{i1}\geq 3W_{i3}\geq 1/1470$

$W_{i2}\geq 2W_{i3}\geq 3W_{i1}\geq 1/1470$，$W_{i3}\geq 2W_{i1}\geq 3W_{i2}\geq 1/1470$，

$W_{i3}\geq 2W_{i2}\geq 3W_{i1}\geq 1/1470$

の6通りになる。それぞれの場合について式(3.1)によって各候補が自分に有利なウェイトを決定し，さらにそれらのウェイトを適応させたときのポイント z_{iq}，その幾何平均 Z_i を求める。計算の結果を表3-2，表3-3，表3-4，表3-5，表3-6，表3-7に示す。

表3-2：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0206	0.0103	0.0069	0.7629	0.72147	0.76289	0.76289	0.75232
D2	0.0242	0.0121	0.0008	0.9038	0.9889	0.9038	0.9038	0.92436
D3	0.0206	0.0103	0.0069	0.3608	0.29284	0.36083	0.36083	0.34248
D4	0.0206	0.0103	0.0069	0.6186	0.59562	0.61855	0.61855	0.61274

表3-3：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0196	0.0065	0.0098	0.7451	0.57857	0.6762	0.7451	0.68268
D2	0.0268	0.0008	0.0012	0.8628	0.98334	0.85523	0.86275	0.88949
D3	0.0207	0.0008	0.0103	0.3922	0.29166	0.39539	0.39216	0.36493
D4	0.0196	0.0065	0.0098	0.5163	0.16032	0.30066	0.51634	0.3367

表3-4：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0104	0.0208	0.0069	0.75	0.6762	0.74999	0.74999	0.73082
D2	0.0117	0.0235	0.0008	0.6319	0.64162	0.63195	0.63195	0.63435
D3	0.0104	0.0208	0.0069	0.2917	0.20205	0.29166	0.29166	0.26609
D4	0.0104	0.0208	0.0069	1	0.99999	1	1	1

表3-5：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0066	0.0199	0.0099	0.7285	0.7285	0.7285	0.7285	0.7285
D2	0.0066	0.0199	0.0099	0.5166	0.51658	0.51658	0.51658	0.51658
D3	0.0066	0.0199	0.0099	0.3046	0.30465	0.30465	0.30465	0.30465
D4	0.0066	0.0199	0.0099	1	1	1	1	1

表 3-6：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0012	0.0008	0.0396	0.9881	0.88887	0.98808	0.98808	0.96229
D2	0.0111	0.0074	0.0222	0.4458	0.68888	0.44582	0.44582	0.49705
D3	0.0012	0.0008	0.0396	0.7268	0.53333	0.72678	0.72678	0.67266
D4	0.0012	0.0008	0.0396	0.749	0.74072	0.74901	0.74901	0.74693

表 3-7：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.0069	0.0123	0.0267	1	0.97941	0.99802	0.99361	0.99273
D2	0.0082	0.0123	0.0247	0.6267	0.6543	0.43959	0.64275	0.58341
D3	0.0008	0.0012	0.04	0.5862	0.56378	0.73205	0.57336	0.61027
D4	0.0076	0.0128	0.0255	1	0.9712	0.77132	1	0.93033

この結果から Z_i^* を求めると，表 3-8 に示すようになる。

表 3-8：各候補のポイント Z_i^*

	Z_i^*
D1	0.79953
D2	0.65384
D3	0.40102
D4	0.72344

この結果から，候補 D1 が 1 位，候補 D4 が 2 位，候補 D2 が 3 位，候補 D3 が 4 位となる。

（カテゴリーごとに複数候補を選んで投票する場合）を次に考える

投票者が，1カテゴリーあたり複数の対象を記入できる場合，1カテゴリーあたり k 位までを記入できる場合を考える。この場合，投票データを直接上記の方法に当てはめることができないので，順位別投票データをカテゴリーごとのポイントに変換する必要がある。すなわち以下のような順序付けの方法をとる。

1．n 人の投票者が，h 個あるカテゴリーそれぞれにふさわしいと思う対象を k

位まで選んで投票。

2. 1つのカテゴリーで得られた投票データにCook & Kressの投票モデルを適用し，候補iごとに自分に一番有利なウェイト$w_{ij}^{(l)}$とそのウェイトを適用させたときのポイント1カテゴリーあたり1つのポイント$\theta_i^{(l)}(l=1,2,\dots,h)$を求め，ウェイトを$m\times k$行列に配し，その列和の幾何平均をとり$\Theta_{il}$とする。

3. 各カテゴリーの優劣をすべての場合（$h!$通り）について仮定し，Cook & Kressの投票モデルを2で求めたポイントΘ_{il}に適用し，候補iごとに自分に一番有利なウェイトW_{il}とそのウェイトを適用させたときのポイントz_{il}を求め，さらにほかの候補のウェイトを適用したときのポイントz_{iq}を求めて$m\times m$行列に配し，その列和の幾何平均をとりZ_iとする。

4. 候補ごとに$h!$通り個あるポイントの幾何平均をとり，最終的なポイントZ_i^*とし，この大小により対象の総合順序付けを行う。定式化すると以下のようになる。

1評価カテゴリーあたりk位まで投票できるとする。あるカテゴリー$l(l=1,2,\dots,h)$においてある候補者が得た$j(j=1,2,\dots,k)$位の票を$v_{ij}^{(l)}$，それに対するウェイトを$w_{ij}^{(l)}$とすると，候補者iに対し一番有利になるウェイトの決め方は以下の式（3.5）のようになる。

$$\theta_i^{(l)}=\max\sum_{j=1}^{k} w_{ij}^{(l)} v_{ij}^{(l)} \quad (i=1,2,\dots,m) \tag{3.5}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{k} w_{ij}^{(l)} v_{ij}^{(l)} \le 1 \quad (q=1,2,\dots,m),$$

$$w_{i1}^{(l)} \ge 2w_{i2}^{(l)} \ge \cdots \ge k w_{ik}^{(l)} \ge \frac{2}{nk(k+1)}$$

式(3.5)の線形計画問題を解き，候補iに一番有利なウェイトを求め，ほかの候補にもそれを適用させる。候補iの獲得票に対して候補$q(q=1,2,\dots,m)$のウェイトを適用させたときのポイント$\theta_{iq}^{(l)}$は次式(3.2)のようになる。

$$\theta_{iq}^{(l)T}=\begin{pmatrix} w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & \cdots & w_{1k}^{(l)} \\ w_{21}^{(l)} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ w_{m1}^{(l)} & & & w_{mk}^{(l)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{i1}^{(l)} \\ v_{i2}^{(l)} \\ \vdots \\ v_{ik}^{(l)} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$\theta_{iq}^{(l)}\,(q=1,2,\dots,m)$ の幾何平均がポイント Θ_{il} となる。Θ_{il} は次式(3.7)のようになる。

$$\Theta_{il}=\left(\prod_{q=1}^{m}\theta_{iq}^{(l)}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.7}$$

対象 i が得たカテゴリー別ポイント Θ_{il} に対してもっとも好都合なウェイト W_{il} を決定する方法は次式(3.8)のようになる。

$$z_i=\max\sum_{l=1}^{h}W_{il}\Theta_{il}\quad(i=1,2,\dots,m) \tag{3.8}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{l=1}^{h}W_{il}\Theta_{ql}\leq 1\quad(q=1,\dots,m),$$

$$W_{i\pi(1)}\geq 2W_{i\pi(2)}\geq\cdots\geq hW_{i\pi(h)}\geq\frac{2}{nh(h+1)}$$

ここで，$\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(h)$ には $\{1,2,\dots,h\}$ が重複なしに入り，すべての場合についての z_i を求める。式(3.8)の線形計画問題を解き，候補 i に一番有利なウェイトを求め，ほかの候補にもそれを適用させる。候補 i の獲得票に対して候補 $q\,(q=1,2,\dots,m)$ のウェイトを適用させたときのポイント z_{iq} は次式(3.9)のようになる。

$$z_{iq}^{T}=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1k} \\ w_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ w_{m1} & & & w_{mk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta_{i1} \\ \Theta_{i2} \\ \vdots \\ \Theta_{ih} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$z_{iq}\,(q=1,2,\dots,m)$ の幾何平均がポイント Z_i となる。Z_i は次式(3.10)のようになる。

$$Z_i=\left(\prod_{q=1}^{m}z_{iq}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.10}$$

式(3.8)における制約条件の第三式のすべての場合について Z_i を求める。ある場合を $p(p=1,2,\ldots,h!)$ としたときの Z_i を Z_{ip} とすると，それらの幾何平均 Z_i^* は以下の式(3.11)で表される。

$$Z_i^* = \left(\prod_{p=1}^{h!} Z_{ip}\right)^{\frac{1}{h!}} \tag{3.11}$$

これが最終的な候補 i のポイントとなり，この大小によって順位付けを行う。

この場合も例を与える。表3-9に示すように，70人の投票者が3種類（F1, F2, F3）のそれぞれに優劣をつけられない評価カテゴリーごとにふさわしいと思う候補を4候補（D1, D2, D3, D4）の中から2位まで選択し投票するとした仮想的データを用いて実験を行う。

表3-9：カテゴリーごとに2位まで候補選んで投票する場合の投票結果

	F1		F2		F3	
	1位	2位	1位	2位	1位	2位
D1	20	30	18	25	24	21
D2	36	25	9	11	10	7
D3	10	9	3	5	18	21
D4	4	6	40	29	18	21

はじめに式(3.5)を用いてカテゴリーごとの投票結果をポイントに直す際に，各候補が自分に一番有利になるようなウェイト $w_{ij}^{(l)}$ をもとめ，さらにそれらのウェイトを適応させたときのポイント $\theta_{iq}^{(l)}$，その幾何平均 Θ_{il} を求める。計算の結果を表3-10，表3-11，表3-12に示す。

表3-10：カテゴリーF1での計算結果

	$w_{i1}^{(1)}$	$w_{i2}^{(1)}$	$\theta_{i1}^{(1)}$	$\theta_{i2}^{(1)}$	$\theta_{i3}^{(1)}$	$\theta_{i4}^{(1)}$	Θ_{i1}
D1	0.0206	0.0103	0.7216	0.7216	0.7216	0.7216	0.7216
D2	0.0206	0.0103	1	1	1	1	1
D3	0.0206	0.0103	0.299	0.299	0.299	0.299	0.299
D4	0.0206	0.0103	0.1443	0.1443	0.1443	0.1443	0.1443

表 3-11：カテゴリー F2 での計算結果

	$w_{i1}^{(2)}$	$w_{i2}^{(2)}$	$\theta_{i1}^{(2)}$	$\theta_{i2}^{(2)}$	$\theta_{i3}^{(2)}$	$\theta_{i4}^{(2)}$	Θ_{i2}
D1	0.0183	0.0092	0.5596	0.5596	0.5596	0.5596	0.5596
D2	0.0183	0.0092	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661	0.2661
D3	0.0183	0.0092	0.1009	0.1009	0.1009	0.1009	0.1009
D4	0.0183	0.0092	1	1	1	1	1

表 3-12：カテゴリー F3 での計算結果

	$w_{i1}^{(3)}$	$w_{i2}^{(3)}$	$\theta_{i1}^{(3)}$	$\theta_{i2}^{(3)}$	$\theta_{i3}^{(3)}$	$\theta_{i4}^{(3)}$	Θ_{i3}
D1	0.029	0.0145	1	1	1	1	1
D2	0.0396	0.0024	0.3913	0.4125	0.3913	0.3913	0.3965
D3	0.029	0.0145	0.8261	0.7625	0.8261	0.8261	0.8097
D4	0.029	0.0145	0.8261	0.7625	0.8261	0.8261	0.8097

Θ_{il}をまとめると表 3-13 のようになる。

表 3-13：各候補のポイント Θ_{il}

	F1	F2	F3
D1	0.7216	0.5596	1
D2	1	0.2661	0.3965
D3	0.299	0.1009	0.8097
D4	0.1443	1	0.8097

次に，式(3.8)にしたがって，各カテゴリーに対するウェイトの制約のパターン

$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$， $W_{i1} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$,

$W_{i2} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$

$W_{i2} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$， $W_{i3} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$,

$W_{i3} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$

の 6 通りそれぞれにおいて一番有利になるウェイト W_{il}を決定する。さらにそれらのウェイトを適応させたときのポイント z_{iq} とその幾何平均 Z_{iq} を求める。計算の結果を表 3-14，表 3-15，表 3-16，表 3-17，表 3-18，表 3-19 に示す。

表 3-14：$W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.7492	0.3746	0.2497	1	1	1	1	1
D2	0.825	0.33	0.22	0.9479	1	0.9479	0.9479	0.9606
D3	0.7492	0.3746	0.2497	0.464	0.4581	0.464	0.464	0.4625
D4	0.7492	0.3746	0.2497	0.6849	0.6272	0.6849	0.6849	0.67

表 3-15：$W_{i1} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.7101	0.2367	0.3551	1	1	1	1	1
D2	0.8334	0.1935	0.2903	0.9139	1	0.9806	0.9139	0.9513
D3	0.8182	0.0008	0.4091	0.5237	0.5037	0.576	0.5237	0.5311
D4	0.7101	0.2367	0.3551	0.6267	0.5488	0.4501	0.6267	0.5581

表 3-16：$W_{i2} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.3726	0.7451	0.2484	0.9342	0.8587	0.9342	0.9342	0.9148
D2	0.466	0.9321	0.0008	0.6693	0.7143	0.6693	0.6693	0.6803
D3	0.3726	0.7451	0.2484	0.3877	0.234	0.3877	0.3877	0.3417
D4	0.3726	0.7451	0.2484	1	1	1	1	1

表 3-17：$W_{i2} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.2294	0.6882	0.3441	0.8948	0.8948	0.8948	0.8948	0.8948
D2	0.2294	0.6882	0.3441	0.549	0.549	0.549	0.549	0.549
D3	0.2294	0.6882	0.3441	0.4167	0.4167	0.4167	0.4167	0.4167
D4	0.2294	0.6882	0.3441	1	1	1	1	1

表 3-18：$W_{i3} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.3231	0.2154	0.6463	1	1	1	1	1
D2	0.3231	0.2154	0.6463	0.6367	0.6367	0.3974	0.3974	0.503
D3	0.0012	0.0008	0.9987	0.6416	0.6416	0.8091	0.8091	0.7205
D4	0.0012	0.0008	0.9987	0.7853	0.7853	0.8096	0.8096	0.7974

表 3-19：$W_{i3} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$ の場合の計算結果

	W_{i1}	W_{i2}	W_{i3}	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	z_{i4}	Z_i
D1	0.2808	0.4212	0.5616	1	1	1	1	1
D2	0.2808	0.4212	0.5616	0.6156	0.6156	0.3971	0.6021	0.5486
D3	0.0008	0.0012	0.9988	0.5812	0.5812	0.8091	0.5428	0.6206
D4	0.2539	0.5522	0.5077	0.9165	0.9165	0.81	1	0.9082

この結果から Z_i^* を求めると，表 3-20 に示すようになる。

表 3-20：各候補のポイント Z_i^*

	ポイント
D1	0.951181
D2	0.553977
D3	0.35364
D4	0.721382

この結果から，候補 D1 が 1 位，候補 D4 が 2 位，候補 D2 が 3 位，候補 D3 が 4 位となる。

最も注目すべき点は獲得票が同数であっても，本論文の手法を用いることにより，それらの候補に序列をつけることができるということである。また，結果から 1 つの評価カテゴリーにおいて大量に票を獲得するより，すべての分野において満遍なく獲得するほうが今回の手法においてはポイントが大きくなることがわかる。

（評価カテゴリーが複数に及ぶ場合の 2 位選出モデル）

表 3-1 に示した投票データを基に順序付けをする際，単に順序をつけるのならば表 3-8 の結果から，候補 D1 が 1 位，候補 D4 が 2 位，候補 D2 が 3 位，候補 D3 が 4 位としてよい。しかし，例えばこれが自動車メーカーの行った新型車のサンプル 4 種から，2 種選ぶための投票であったら単純に 1 位の D1 と 2 位の D2 を選んでよいか考える必要がある。というのもこのような場合 1 位の D1 と似た傾向を持つ商品を売り出しても D1 と消費者の取り合いをしてしまったり，1 位の商品が売れなかった時に全滅してしまったりする恐れがあるからで

ある。そこで，1位を第3章で説明した方法で選出した後，1位の候補のポイントが低くなるような制約を新たに設けてもう一度判定を行う方法を考える。今回示す手法は，この章のはじめ（評価カテゴリーが複数に及ぶ場合）に示す方法で1位を決定した後，式(3.3)，式(3.10)で得られたZに新たにウェイトをかけたものをポイントとし，その幾何平均で順序を決定付けるというものである。なお，ウェイトを決定する際には1位となった候補者が不利になるような制約を設ける。

（順序付けの方法）

1. 式(3.1)-式(3.4)，式(3.5)-式(3.11)によって1位を決定。
2. 式(3.3)，式(3.10)で得られたに Cook & Kress の投票モデルを適用し，候補者ごとに自分に一番有利になるウェイトW^*_{ip} $(p=1,2,\ldots,h!)$ とそのウェイトを適用させたときのポイントx_{ii}を決定する。その際，1位を獲得した候補aのポイントZ_{ap} $(p=1,2,\ldots,h!)$ が小さいものに対してより大きなウェイトがかかるように制約を設ける。例えば，$p=2$ で $Z_{a1}=1$，$Z_{a2}=2$ のときは，$W^*_{i1}\geq 2W^*_{i2}$ となる。さらにほかの候補のウェイトを適用したときのポイントz_{iq}を求めて$m\times m$行列に配し，その幾何平均をX_iとし，X_iの大小によって序列を決定する。

（定式化）

式(3.4)，式(3.11)のポイントZ^*_iが最大となった候補が候補aだったとする。

$\{Z_{a1},Z_{a2},Z_{a3},\ldots,Z_{ah!}\}$ を値の小さい順に並べる。並べたものを $\{Z_{ag(1)},Z_{ag(2)},\ldots,Z_{ag(h!)}\}$ とする。ここで，$g(1),g(2),\ldots,g(h!)$ には $Z_{ag(p)}$ $(p=1,2,\ldots,h!)$ が小さい順になるように $\{1,2,\ldots,h!\}$ が重複なしで入る。ウェイトに対する条件は，次式(3.12)のようになる。

$$W^+_{ig}\geq 2W^*_{ig(2)}\geq 3W^*_{ig(3)}\geq\cdots\geq h!W^*_{ig(h!)}\geq\frac{2}{nh!(1+h!)} \qquad (3.12)$$

候補者iのポイントZ_{ip}に自分に一番有利なウェイトを適用させたときのポイ

ントを x_i とする。式(3.12)の条件式と Cook & Kress のモデルを組み合わせると，次式(3.13)のようになる。

$$x_i = \max \sum_{p=1}^{h!} W_{ip}^* Z_{ip} \quad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{3.13}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{p=1}^{h!} W_{ip}^* Z_{qp} \leq 1, \quad (q=1, 2, \ldots, m),$$

$$W_{ig(1)}^* \geq 2W_{ig(2)}^* \geq 3W_{ig(3)}^* \geq \ldots \geq h!W_{ig(h!)}^* \geq \frac{2}{nh!(1+h!)}$$

式(3.13)の線形計画問題を解き，候補 i に一番有利なウェイトを求め，ほかの候補にもそれを適用させる。候補 i の獲得票に対して候補 $q\,(q=1,2,\ldots,m)$ のウェイトを適用したときのポイント x_{iq} は次式(3.14)のようになる。

$$x_{iq}^T = \begin{pmatrix} W_{11}^* & W_{12}^* & \cdots & W_{1h!}^* \\ W_{21}^* & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ W_{m1}^* & & & W_{mh!}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ih!} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$x_{iq}\,(q=1,2,\ldots,m)$ の幾何平均が最終的なポイント X_i となる。X_i は次式(3.15)のようになる。

$$X_i = \left(\prod_{q=1}^{m} x_{iq} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.15}$$

これが最終的な候補 i のポイントとなり，この大小によって順位付けを行う。

この場合も例を与える。

(1位も含めて再評価する場合)

$p=1$ のときのウェイトの大小を $W_{i1} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$

$p=2$ のときのウェイトの大小を $W_{i1} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$

$p=3$ のときのウェイトの大小を $W_{i2} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i3} \geq 1/1470$

$p=4$ のときのウェイトの大小を $W_{i2} \geq 2W_{i3} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$

$p=5$ のときのウェイトの大小を $W_{i3} \geq 2W_{i1} \geq 3W_{i2} \geq 1/1470$

$p=6$ のときのウェイトの大小を $W_{i3} \geq 2W_{i2} \geq 3W_{i1} \geq 1/1470$

とする。各候補のポイント Z_{ip} は以下の表 3-21 のようになっている。

表 3-21：各候補のポイント Z_{ip}

	Z_{i1}	Z_{i2}	Z_{i3}	Z_{i4}	Z_{i5}	Z_{i6}
D1	0.752321	0.682679	0.730819	0.7285	0.962289	0.992729
D2	0.924358	0.889486	0.634353	0.51658	0.497053	0.583415
D3	0.342479	0.364928	0.266087	0.304646	0.672665	0.610271
D4	0.612735	0.336695	0.999998	1	0.746932	0.930326

このうち，1位となった候補 D1 のポイントを大きい順に並べると，以下に示す式(3.16)のようになる。

$$Z_{16} > Z_{15} > Z_{11} > Z_{13} > Z_{14} > Z_{12} \tag{3.16}$$

よって，今回の場合ウェイトに関する制約は，以下に示す式(3.17)のようになる。

$$W_2^* \geq 2W_4^* \geq 3W_3^* \geq 4W_1^* \geq 5W_5^* \geq 6W_6^* \geq \frac{1}{1470} \tag{3.17}$$

この条件の下，各候補に一番有利なウェイト W_{ip}^* を求める。結果を表 3-22 に示す。

表 3-22：各候補者に一番有利なウェイト W_{ip}^*

	W_{i1}^*	W_{i2}^*	W_{i3}^*	W_{i4}^*	W_{i5}^*	W_{i6}^*
D1	0.124991	0.61979	0.166655	0.249982	0.099993	0.083327
D2	0.124991	0.61979	0.166655	0.249982	0.099993	0.083327
D3	0.124991	0.61979	0.166655	0.249982	0.099993	0.083327
D4	0.090327	0.622012	0.207337	0.311006	0.072261	0.060218

さらにそれらのウェイトを適用させた時のポイント x_{iq} は，以下の表 3-23 のようになる。

表 3-23：ウェイトを適用させたときのポイント x_{ip}

	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}
D1	1	1	1	1
D2	1	1	1	1
D3	0.5076	0.5076	0.5076	0.493198
D4	0.854112	0.854112	0.854112	0.893115

x_{iq} の幾何平均 X_i を式(4.4)にしたがって求めると，以下の表 3-24 のようになる。

よって，この場合 2 位には D2 が選出されることになる。

表 3-24：x_{iq} の幾何平均 X_i

	X_i
D1	1
D2	1
D3	0.50396
D4	0.8637

（1 位を除いて再評価する場合）

次に，1 位となった候補 D1 抜きで上記の手法を用いて 2 位を決定する。

各候補のポイント Z_{ip} は以下の表 3-25 のようになっている。

表 3-25：各候補のポイント Z_{ip}

	Z_{i1}	Z_{i2}	Z_{i3}	Z_{i4}	Z_{i5}	Z_{i6}
D2	0.924358	0.889486	0.634353	0.51658	0.497053	0.583415
D3	0.342479	0.364928	0.266087	0.304646	0.672665	0.610271
D4	0.612735	0.336695	0.999998	1	0.746932	0.930326

D1 抜きで候補に一番有利なウェイト W^*_{ip} を求める。結果を表 3-26 に示す。

表 3-26：各候補に一番有利なウェイト W^*_{ip}

	W^*_{i1}	W^*_{i2}	W^*_{i3}	W^*_{i4}	W^*_{i5}	W^*_{i6}
D2	0.139902	0.559609	0.186536	0.279804	0.111922	0.093268
D3	0.139902	0.559609	0.186536	0.279804	0.111922	0.093268
D4	0.139902	0.559609	0.186536	0.279804	0.111922	0.093268

さらにそれらのウェイトを適用させた時のポイント x_{ip} を求めると，以下の表 3-27 のようになる。

表 3-27：ウェイトを適用させたときのポイント x_{iq}

	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}
D2	1	1	1
D3	0.519211	0.519211	0.519211
D4	0.910848	0.910848	0.910848

x_{iq} の幾何平均 X_i を求めると，以下の表 3-28 のようになる。

表 3-28：幾何平均 X_i

	X_i
D2	1
D3	0.519211
D4	0.910848

よって，この場合でも候補 D2 が 2 位に選出されることになる。

最も注目すべきなのは，合計得票数が 1 位の D1 と同数であった D4 が 2 位にならなかったことである。これは，D1 と票の取り方が似た傾向にある候補の選出を避けるために設けた制約条件式(4.1)の影響のためだと考えられる。表 3-21 を見ると，特に Z_{i5}，Z_{i6} の部分，すなわち W^*_{i5}，W^*_{i6} の大小が特に影響したことがわかる。このように，今回の手法は 1 位と票の取り方が似た傾向の候補を選び出さないことができる。

4. 終　わ　り　に

公平公正な評価は難しい。このことは 3 章での例でも顕著に表れている。しかし，今までのように何か恣意的な匂いが濃そうなものよりはましであると思われる。少なくとも絶対的なものはなさそうであるということが理解できると数理的な評価しかなさそうであることがわかるであろう。従って人事評価，さらには企業での昇進のためとか，政策評価に用いることができると思われる。一方で評価方法はなるべき分かり易いものである必要があるので，どうバランスをとるかが重要である。ここでの方法は計算量が多くなることも考えられる

ので，改良が必要である。特に線形計画問題を何度も解くので，前の最適解から出発して解くなどが考えられる。もっと重要なのはここでは2人までを選出することを考えているが，2人と3人以上は難しさが違うのでこれからの研究として大きな課題である。特に複数選択の研究の動機はオリンピックの女子マラソンの代表選手の選び方に起因しており，そこでは3人選であった。我々の研究の発展として日本のスポーツ振興に役立てようと思えばなおさらこの発展は重要である。この辺りの研究をする人が増えてくれば我々の存在感も増すであろう。このことを切に願ってこの稿を閉じたい。

（謝辞）

ここでの論文は大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻博士前期課程1回生渡辺君の学部4年次での卒業研究に大いによっています。ここに感謝を表したいと思います。

また神戸学院大学小川賢先生の大阪大学博士論文によるところも大であります。

参考文献

[1] J.C. Borda: Memoire sur le Elections au Scrutin, Histoire de L'acad, Royale Scientifique Paris, (1781).

[2] W.D. Cook and M.Kress, "A data envelopment model for aggregating preference ranking", Management Science, 36, (111) (1990) 302-1310.

[3] R.H. Green, J.R. Doyle and W.D. Cook, "Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation", European Journal of Operational Research, 90(3) (1996) 461-472.

[4] H. Noguchi and H. Ishii, "The appropriate total ranking method using DEA for multiple categorized purposes", Information, Economics & Management Science, Journal of The University of Marketing and Distribution Sciences, Vol. 9, No. 2 (2000) 21-34.

[5] H. Noguchi and H.Ishii, "The application of rank ordinal data using DEA model to conjoint analysis", Mathematica Japonica. 51, (1) (2000) 21-34.

[6] Masaru Ogawa: Mathematical Evaluation Methods Based on Diverse Information and Their Applications, Doctorial Dissertation of Osaka University (2003).

[7] 渡辺論　複数観点における投票データの数理的解析手法，2005年度大阪大学卒業研究論文