食品加工業への数理的考察

石　井　博　昭

1. は じ め に

この書き物は2004年度の塩出先生，毛利先生のプロジェクトに参加した結果である。昨年度ハンガリーで行われたISIR2004 で食品加工業に関する発表で，そのスケジューリングは基本的にバッファーをもつバッチスケジューリングであることを示していた。文献[１]である。ヨーロッパと日本では違いがあるかもしれないが，パンなどは最後にバッチで焼き上げられている。

食品加工業のスケジューリングや在庫管理の数理的アプローチは非常に少ない。その理由の１つは中小企業が多いのでシステム的生産が困難である。また，独自の技術がある企業が多く，充分売れるのでコスト削減の必要性がない場合も多い。さらには食品の特性上，品質の向上（おいしさの追求）の方に関心が強い点も影響しているように思われる。ここでは食品生産で役立つと思われるバッチスケジューリングと販売に関係する腐敗しやすい製品の在庫管理政策の研究の一端を紹介し，その後これらを食品加工にどう結び付けるかを示す。

2. バッチスケジューリング

従来のスケジューリングモデルでは各機械は一度に１つの仕事しか処理できないとしていたのであるが，パン工場などの釜は幾つものパンを同時に焼けるように同時処理が可能である。一般的には複数の仕事が機械で処理されて同時に終了される場合を称してバッチ処理といっており，そのようなバッチ処理を

含むスケジューリングを総称してバッチスケジューリングという。バッチ処理のタイプは2通りある。1つは生産現場ではパッレトなどの都合で，実際には連続処理であるが，次の処理へは一定溜まった段階で回す。すなわち一群の仕事はバッチとしてまとまって扱われるので，その中の一番最後の仕事の完了時間がこの中の全ての仕事の完了時間として扱われる場合である。運送屋は梱包して一杯になるまで積み込んでから，多くの荷物を一度の処理をする。このようにこの場合，前処理がバッチとしてまとめるあるいは前のバッチ処理からの切り替えが必要である。

一方食品加工などでは本当に一度に沢山の材料を焼成する。ウエファーなども同じ状況である。バッチスケジューリングでは仕事のバッチへのまとめ方とバッチ間の処理順序を決定することが要求される。また，通常各仕事には納期がある。組み合わせと順序付けと両方があるので，ほとんどの問題はNP困難である。バッチスケジューリングについては膨大な研究があるが，この書き物の目的は食品加工業への応用であるので，後者のタイプのバッチ処理についてのみ考察する。初期のころは前者のタイプの研究が主ではあった。

日本での食品製造工程における生産スケジューリングシステムの開発としては岩手県立大学経営情報システム学講座岡本東氏等によるパン製造スケジューリングの研究があるが，ピッキングシミュレーションによるものである。複数の釜で数種類のパンを作る際のスケジューリングを考えている。

ここでは，Chang Sup Sung et al. [2]のモデルのファジィ版を考える。

2機械バッチスケジューリング問題でフローショップタイプである。すなわち各仕事は最初機械 M_1 で処理され，次に機械 M_2 で処理される。バッチサイズすなわち同時に処理できる仕事量は M_1 では固定であるが M_2 では可変とする。これらの機械で処理されるべき独立な n 個の仕事，J_1，J_2，…，J_n があるとする。仕事の処理時間は同じである。2つの機械はバッチ処理をする機械であり，同じバッチで処理された仕事は同じ完了時間を持つ。M_2 での各仕事の完了に関してファジィ納期がある。すなわち，各 J_j には完了時間に関する満足度で表現さ

れる帰属度をもつ融通のきく納期が付随している。J_jの完了時間を C_jで示し，ファジィ納期の帰属度関数（満足度）$\mu_j(C_j)$ は

$$\mu_j(C_j)=\begin{cases}1 & (C_j \leq d_j)\\ 1-\dfrac{C_j-d_j}{e_j} & (d_j \leq C_j \leq d_j+e_j)\\ 0 & (C_j \geq d_j+e_j)\end{cases}$$

とする。また M_2 でのバッチの容量はその大きさによる満足度で帰属度が示されるファジィ容量 c_2 である。この帰属度を $\mu(c)$ で示すと

$$\mu(c)=\begin{cases}1 & (c \leq a)\\ 1-\dfrac{c-a}{b} & (a \leq c \leq a+b)\\ 0 & (c \geq a+b)\end{cases}$$

とする。一方 M_1 でのバッチの容量は c_1 で一定である。これらの設定の下ですべてのファジィ納期に関する最小の満足度の最大化と M_2 での容量に関する満足度の最大化を計る。通常この2つの目標を同時に満足させるスケジュールは存在しないので以下に定義する非劣スケジュールを求めることを考える。

（非劣スケジュール）

α をファジィ納期に対する最小の満足度, μ を M_2 での容量に関する満足度を示すのに用い，そのもとでの実行可能なスケジュールを $X=S(\alpha,\ \mu)$ で示す。また, 逆に $V^X=(V_1^X,\ V_2^X)$ で対応するベクトル（スケジュールベクトルという）を示す。ここで，V_1^X はスケジュール X に対するファジィ納期の最小満足度，V_2^X はスケジュール X に対する容量満足度である。スケジュール X_1, X_2 に対して，そのスケジュールベクトル（$V_1^{X_1}$, $V_2^{X_1}$)，（$V_1^{X_2}$, $V_2^{X_2}$）の間に

$$V_1^{X_1} \geq V_1^{X_2},\quad V_2^{X_1} \geq V_2^{X_2} \text{ かつ } (V_1^{X_1},\ V_2^{X_1}) \neq (V_1^{X_2},\ V_2^{X_2})$$

が成り立つ時，X_1 は X_2 に優越すると定義する。スケジュール X は優越するスケジュールが存在しないとき非劣スケジュールであるという。

もし（α, μ）を固定すれば，各仕事の完了時間について $C_j \leq d_j+(1-\alpha)e_j$ と等価であるので，確定納期を $d_j+(1-\alpha)e_j$ とした場合，また，M_2 での容量を

$(1-\mu)b+a$ とした場合となる。すなわち，修正納期 $d'_j=d_j+(1-\alpha)e_j$，修正容量 $c'=(1-\mu)b+a$ として［2］の解法を適用すればこのときの最適解を多項式時間で見つけることができる。すなわち，［1］におけるもとのモデルは (α, μ) を固定した場合に相当し，そのときの納期で最大納期遅れを最小にするスケジュールを求める問題となる。スケジュール π の下での各仕事 J_j の納期遅れ $T_j(\pi)$ は $C_j(\pi)$ を π での仕事 J_j の完了時間とすると $T_j(\pi)=\mathrm{Max}\{0, C_j(\pi)-dj'\}$ と定義される。完了時間が納期よりどれだけ遅れたかを示す量である。その中で最大の納期遅れが最大納期遅れである。最適解は仕事を修正納期の小さい順に処理すればよいことが知られている（EDD ルールという）。修正納期の順番が変わるような α で分けて考えればよいとわかる。ここで $\overline{\alpha}=1-\alpha$ とおくと $\overline{\alpha}$ は最大不満足度を表わす。この変わる値は $\overline{\alpha}$ を用いて次の $\overline{\alpha}_{ij}$ となる。まず必要なら仕事の番号を入れ替えて，一般性を失うことなく $i<j$ について $d_i \leq d_j$ であると仮定する。もし $d_i=d_j$ なら，$e_i \leq e_j$ $(i<j)$ と仮定する。

$$\overline{\alpha}_{ij}=\begin{cases}\dfrac{d_j-d_i}{e_i-e_j} & (\mathit{if} \quad d_j-d_i<e_i-e_j) \\ 1 & (\mathit{otherwise})\end{cases}$$

次にこの $\overline{\alpha}_{ij}$ をソートする。その結果が $0=\overline{\alpha}_0<\overline{\alpha}_1<\overline{\alpha}_2<\cdots<\overline{\alpha}_q<\overline{\alpha}_{q+1}=1$ であったとする。ここで q は $(0, 1)$ にあって異なる $\overline{\alpha}_{ij}$ の個数である。区間 $[0, 1]$ を部分区間 $\Delta_i=[\overline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_{i+1})$，$i=0, 1, 2, \cdots, q$ に分割する。あるスケジュール π_i は部分区間 Δ_i でいつも最適となる。ただこの中で非劣スケジュールとなるものはこの部分区間の中央 $\overline{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_{i+1}}{2}$ での π_i の実行可能性，すなわち最大納期遅れが 0 かどうか固定された μ についてチェックする。もし実行可能でなければ，実行可能になるような最大の μ に下げる。実行可能な場合は実行可能な最大の μ に上げる。これを全ての $i=0, 1, 2, \cdots, q$ に対して行う。実際の解法の概略は以下のごとくである。

$B_{k,l}$ を M_ℓ, $\ell=1, 2$ での k 番目のバッチに含まれる仕事の集合とし，p_l を M_ℓ, $\ell=1, 2$ でのバッチ数とするとき，バッチ系列 π（スケジュール π）は

$\pi=\{B_{1,1}, \cdots, B_{p_1,1}B_{1,2}, \cdots, B_{p_2,2}\}$ とあらわされる。各仕事の処理時間は同一であるので一般性を失うことなく単位時間とし，各機械の容量を c_ℓ，$\ell=1, 2$ とすると

$$p_1\in\left\{\left\lceil\frac{n}{c_1}\right\rceil,\ldots,n\right\},\ p_2\in\left\{\left\lceil\frac{n}{c_2}\right\rceil,\ldots,n\right\}$$

となる。ここで $\lceil z\rceil$ は z より小さくない最小の整数を意味する。$r_j(\pi)$ を仕事 J_j の π での M_2 への到着時間，すなわち，M_1 でのスケジュールによる完了時間とする。

しばらく，混乱が起こらない範囲で $r_j(\pi)$，$C_j(\pi)$，$T_j(\pi)$ を単に r_j，C_j，T_j と記す。また，最大納期遅れも単に $T_{\max}$ と記す。このとき最小の $T_{\max}$ は r_j，C_j，T_j から複雑であるが文献[2]の方法で求まる。詳細は省く。また，全体の計算複雑さは $O(n^2\max(a+b, q)/c_1)$ となる。

3．腐敗しやすい製品の在庫管理

食品加工で留意すべきもう1つは在庫管理である。腐敗しやすい製品としては血液，フィルム，生鮮食料品，季節商品　等が想定されていて，そのモデルの要素としては

1）揮発しやすい商品――ガソリン等

2）劣化しやすい商品

　a）rotation-allocation 政策　血液センター

　b）発注在庫政策

が考えられ，最近はさらに品切れ費用のファジィ数化，残り寿命により異なった価格，2種類の顧客，発注費用の2段階化などが研究されてきた。しかし，パンなどの食品についてはほとんど考えてこられなかった。ましてや，生産管理との融合としての SCM（Supply Chain Managemt）の観点からは論じられていない。

ここでは腐敗しやすい1つの商品でランダム需要，品切れ費用のあいまい性，

新鮮さに敏感な客と値段に敏感な客の2種類の顧客がある場合のモデルを紹介する。

（モデル）

1．1期間，1種類の腐敗しやすい商品を考える。

2．発注は期間のはじめに行われ，単位当たりの仕入れ値を c で表す。

3．商品の使用期限は m 期間である。

4．最も新鮮な商品（使用期限の残りが m）のみ購入する客（タイプ H）と，新しい商品と比べて値段が安ければ古い商品を購入する客（タイプ L）があるとする。

まずタイプ H の需要が優先され，次に残った在庫でタイプ L の需要に応じる。

5．タイプ L に対しては先入れ先出し方策（残り寿命が少ないものから払い出す）を使用するものとする。

6．m 期間過ぎても売れ残っている在庫は廃棄処分される。単位当たりの廃棄費用は次のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{\theta}}(t)$ で特性づけられる $\boldsymbol{L}$ ファジィ数 $\tilde{\theta}$ とする。

$$\mu_{\tilde{\theta}}(t)=\max\left\{L\left(\frac{t-m_0}{\alpha_0}\right),\ 0\right\}$$

ここで L はRからRへの型関数で，次の条件を満足するものとする。

(a) $L(-t)=L(t) \quad t\in\mathbf{R}$ (b) $L(t)=1 \Leftrightarrow t=0$

(c) $L(\cdot)$ は $[0,\ \infty)$ で単調非増加 (d) t_0 は L の零点

さらに費用の性質から，一般性を失う事なく $m_\theta-t_0\alpha_\theta>0$ と仮定することができる。

7．在庫は期間の最初に起こる需要によって払い出される．モデルは1期間で求める．それぞれの期間におけるタイプ H の需要量を表す確率変数を D_j^H とし，確率分布関数および確率密度関数をそれぞれ $F_j^H(\cdot)$，$f_j^H(\cdot)$ とする。また，D_j^H は互いに独立な非負の確率変数とし，$F_j^H(0)=f_j^H(0)=0$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，

m を満たし，0以外で連続であるものとする。また，それぞれの期間におけるタイプ L の需要量を表す確率変数を D_j^L とし，確率分布関数と密度関数をそれぞれ $F_j^L(\cdot)$，$f_j^L(\cdot)$ とする。確率変数および分布関数の満たす条件についてはタイプ H と同様であるとする。

8．タイプ H の需要，タイプ L の需要に対する単位当たりの品切れ費用は，それぞれ L ファジィ数 $\tilde{p}_H=(m_{pH},\ \alpha_{pH})_L$，$\tilde{p}_L=(m_{pL},\ \alpha_{pL})_L$ として表される。ここで以下に定義するファジィ数のファジィマックス順序に関して $\tilde{p}_L \le \tilde{p}_H$ とする。

(ファジィマックス順序)

ファジィ数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ に関して p，q をそれぞれのセンターとすると

$$\widetilde{A} \le \widetilde{B} \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\, p \le q \\ \text{かつ} \\ (ii)\, p \le \exists d \le q: \\ \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \mu_{\tilde{B}}(x),\ \forall x < d \\ \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x),\ \forall x > d \end{cases}$$

上記の定義は $\tilde{A}=(p,\ \alpha)_L$，$\tilde{B}=(q,\ \beta)_L$ とすると

$$\widetilde{A} \le \widetilde{B} \Leftrightarrow q-p \ge t_0|\alpha-\beta|$$

と等価となる。また，単位当たりの保管費用を h とする。

9．使用期限が k 期 残っている商品は単位当たり R_k，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ で売られ，$R_{k+1} \ge R_k$ とする。

10．上記の設定の下で期待を最大にする発注量を求める（ファジィ順序の意味で）。

まず次の記号を導入する。

y：発注量（決定変数）

x_i，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$：i 期間後に腐敗する手持在庫量

x：使用期限が 1～$m-1$ 残っている商品の量の合計，すなわち　$x=\sum_{i=1}^{m-1} x_i$

X_p：P期間後までに腐敗する手持ち在庫を表すベクトル，すなわち，

$X_p=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$，$p=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$，$X_0=\phi$

B_j：j期間後に腐敗する商品が全部払い出された後の満足されない全需要量

$B_j=[D_j^L+B_{j-1}-x_j]^+$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$，$B_0=0$

ただし　$[a]+=\max(a,\ 0)$

$Q_n(u:X_{n-1})=\Pr\{D_n^L+B_{n-1}\leq u\}$，$1\leq n\leq m$：の確率分布関数

$q_n(u:X_{m-1})$：$Q_n(u:X_{n-1})$ の確率密度関数

$\tilde{K}(y:X_{m-1})$：期待利益＝(期待売り値)－(期待必要経費)

(期待利益)

上記の設定のもとで計算すると期待利益関数は以下のようになる。詳細は［3］を参照していただきたい。

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K}(y:X_{m-1})=&\sum_{k=1}^{m-1}R_k\int_0^y f_0^H(v)\int_0^{y-v}\Bigl\{Q_{m-k}\Bigl(u+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\Bigr)\\
&-Q_{m-k-1}\Bigl(u+\sum_{j=m-k-1}^{m-1}x_j:X_{m-k}\Bigr)\Bigr\}\\
&dudv+R_m\Bigl\{y-\int_0^y f_1^H(v)\int_x^{x+y-v}F_1^L(u)dudv\Bigr\}\\
&-\Bigl[cy+h\Bigl\{\int_0^y f_1^H(v)\int_0^{x+y-v}(x+y-u-v)f_1^L(u)dudv+(1-F_1^H(y))\int_0^x f_1^L(u)du\Bigr\}\\
&+\widetilde{p}_H\Bigl\{\int_y^\infty vf_1^H(v)dv-y(1-F_1^H(y))\Bigr\}+\widetilde{p}_L\Bigl\{\int_0^y f_1^H(v)\int_{x+y-v}^\infty(u+v-x-y)f_1^L(u)dudv\\
&+(1-F_1^H(y))\int_x^\infty f_1^L(u)du\Bigr\}+\widetilde{\theta}\int_0^y F_1^H(v)Q_m(y-v:X_{m-1})dv\Bigr]
\end{aligned}
$$

廃棄費用，品切れ費用がLファジィ数であることから，拡張原理により$\tilde{K}(y:X_{m-1})$もLファジィ数 $(m(y:X_{m-1}),\ \alpha(y:X_{m-1}))_L$ となる。ここで

$$
\begin{aligned}
m(y:X_{m-1})=&\sum_{k=1}^{m-1}R_k\int_0^y f_1^H(v)\int_0^{y-v}\Bigl\{Q_{m-k}\Bigl(u+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\Bigr)\\
&-Q_{m-k-1}\Bigl(u+\sum_{j=m-k+1}^{m-1}x_j:X_{m-k}\Bigr)\Bigr\}
\end{aligned}
$$

$$dudv+R_m\left\{y-\int_0^y f_1^H(v)\int_x^{x+y-v}F_1^L(u)dudv\right\}$$

$$-\left[cy+h\left\{\int_0^y f_1^H(v)\int_0^{x+y-v}(x+y-u-v)f_1^L(u)dudv+(1-F_1^H(y))\int_0^x f_1^L(u)du\right\}\right.$$

$$+m_{p_H}\left\{\int_y^\infty vf_1^H(v)dv-y(1-F_1^H(y))\right\}+m_{p_L}\left\{\int_0^y f_1^H(v)\int_{x+y-v}^\infty(u+v-x-y)f_1^L(u)\right.$$

$$\left.\left.dudv+(1-F_1^H(y))\int_x^\infty f_1^L(u)du\right\}+m_\theta\int_0^y F_1^H(v)Q_m(y-v:X_{m-1})dv\right]$$

$$\alpha(y:X_{m-1})=\alpha_{p_H}\left\{\int_y^\infty vf_1^H(v)dv-y(1-F_1^H(y))\right\}$$

$$+\alpha_{p_L}\left\{\int_0^y f_1^H(v)\int_{x+y-v}^\infty(u+v-x-y)f_1^L(u)dudv\right.$$

$$\left.+(1-F_1^H(y))\int_x^\infty f_1^L(u)du\right\}\alpha_0\int_0^y F_1^H(v)Q_m(y-v:X_{m-1})dv\Big]$$

ファジィマックス順序は半順序であるので，次で定義される非劣発注量を求める。

(非劣発注量)

次の条件を満たす $\hat{y}$ が存在しないとき，発注量 $\tilde{y}$ は非劣発注量という。

$$\tilde{K}(\tilde{y}:X_{m-1})\leq\tilde{K}(\hat{y}:X_{m-1})$$

$m(y:X_{m-1})$ を最大にする発注量 y^m と $m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})$ を最大にする y^0 は共に非劣発注量である。$m(y:X_{m-1})$ および $m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})$ は $y=0$ を除いて y に関して狭義凹関数となることが示せる([３])ので，最終的に次の結果を得る。

(２つの非劣発注量)

$$y^m=\begin{cases}\bar{y}\,(R_m+m_{p_H}-c>0)\\ 0\,(R_m+m_{p_H}-c\leq 0)\end{cases}$$

ただし　$\bar{y}$ は $\partial m(y:X_{m-1})/\partial y=0$ の解である。

$$y^0=\begin{cases}\breve{y}\quad(R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c>0)\\ 0\quad(R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c\leq 0)\end{cases}$$

ただし　$\breve{y}$ は $\partial\{m(y:X_{m-1})+\alpha(y:X_{m-1})\}/\partial y=0$ の解である。

(考察) ([3])の結果から，次のことがわかる。

(1) 廃棄費用のあいまい性のみを考慮した場合

$R_m + m_{pH} - c > 0$ のとき $y^0 > y^m$ であり，その他の場合は $y^0 = y^m = 0$ である。

すなわち，廃棄費用の曖昧さが含まれるときは発注量をふやすべきである。

(2) 品切れ費用のあいまい性のみを考慮した場合

$R_m + m_{pH} - c > 0$ のとき $y^0 < y^m = 0$ であり，その他の場合は $y^0 = y^m = 0$ である。

すなわち，品切れ費用のあいまいさが含まれるときは発注量を減らすべきである。

4. 食品加工への統合の展望

2.3.の結果を統合すれば，現在の在庫量からいつどれぐらいの製品を作るべきか情報が得られるので，その情報に従ってバッチスケジューリングをすればよいことになる。食パンなどは寿命が2期間，2回の工程のようであるので，実際には腐敗しやすい製品の在庫管理はもっと単純になりそうである。むしろネックになるのは多品種の問題である。この辺りも含めて1つのSCMとして考えることができるのでないかと思っている。今具体的にパンの生産モデルを作成中である。乞うご期待！

参考文献

[1] Renzo Akkerman et. al., "Dedicated and flexible intermediate storage in a two" stage food production system (ISIR 2004)

[2] Chang Sup Sung et al., "Minimizing due date related performance measure on two batch processing machine," European Journal of Operational Research 147 (2003) pp. 644-656.

[3] Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, "Fuzzy inventory problems for perishable commodities, European Journal of Operational Research 138, No. 3, (2002) pp. 545-553.