町を横切る川に架ける橋の最適配置

塩　出　省　吾

要　約

直線状の障壁のある場合に障壁によって分離された領域間の地点を互いに通過可能にする障壁に設ける横断点を最適に配置する問題は塩出（[1]）によって研究された。ここでは，町を流れる川を考え，その川に橋を架ける問題を考える。すなわち塩出（[1]）が扱った問題において障壁が直線ではなく曲線状をなす場合を考える。障害物がない2点間の移動距離は直線距離で測るとし，すべての需要点間を互いに移動する距離の重み付き総和が最小になるように川に橋を架ける。この問題は直線状の場合は各需要点と橋との距離を考えた1次元配置問題になったのであるが，川のような曲線状では直線の場合とは異なって，2点間の移動距離は曲線の形状にも依存するので，直線状の場合の解法を修正しなければならない。本研究では塩出の研究（[1]）を基に曲線状の場合について問題を解析し最適な解を見つける解法を導いた。

1. はじめに

施設の最適配置問題の研究において，移動に際して障害となるような障害物を考慮した問題は，これまでいくつかの論文（[2－4]）で研究されてきた。しかし，それらの論文で考えられた障害物というのは有界なものとして与えられているので，迂回すれば目的地に到達でき，移動するのを完全に妨げるというものではなかった。そこで，塩出（[1]）は迂回のできない有界でない障害物を考え，障害物に穴を開け通過させることを考えた。障害物として直線を考え，全需要点間の相互移動距離の和を最小にするように直線に通過できる点を設ける問題の解法を考えた。この論文では障害物として川を考える。川はある町を横切っており，無限の長さがあるわけではないので有界であるが，現実的

には川の切れる端まで行って迂回することなどは考えられないので，川を横切って横断するための橋を設けるのである。それゆえ本論文で考えるのは曲線状の川であり，この川によって町が２つに分離されているのである。分離された２つの地域間の移動は川に橋を架けることによって両地域間を行き来する。

2. 問題の定式化

ある町に川が流れており，それが町を２つの地域に分けているとする。この川に橋を建設して２つの地域の住民が互いに行き来することができるようにする。数学的に表すと，平面上に１つの単一曲線があり，この曲線によって平面が２つの有界でない領域 R_1，R_2 に分離されるとする。R_1 内に存在する需要点を $A_i=(a_i,\ b_i)$，$i=1,\ \cdots,\ m$ とし，R_2 内に存在する需要点を $A_i=(a_i,\ b_i)$，$i=m+1,\ \cdots,\ m+n$ とする。また，川の上には需要点が存在しないと仮定する。領域 R_1 内の需要点と領域 R_2 内の需要点は上記の川によって地域が遮断されており，互いに他方の領域へ行くことはできない。そこでその川に橋を架けて，その橋を経由して互いに相手地域にまで移動可能にすることを考える。領域 R_1 の需要点 A_i と領域 R_2 の需要点 A_j を繋ぐ経路の平均移動回数を w_{ij} とし，全移動距離の最小化を問題として考える。川に架けた橋の位置を $X=(x,\ y)$ とすると領域 R_1 の需要点A_iと領域 R_2 の需要点 A_j との間の最短経路の長さ $d(A_i,\ A_j)$ は

$$d(A_i, A_j)=a(A_i, X)+d(X, A_j)$$

と与えられるので移動距離の総和は定式化すると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+n} w_{ij}\{d(A_i, X)+d(X, A_j)\}+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} w_{ij}d(A_i, A_j)$$
$$+\sum_{i=m+1}^{m+n-1}\sum_{j=i+1}^{m+n} w_{ij}d(A_i, A_j)$$

この式において最初の項が横断点 X を経由して領域 R_1 と領域 R_1 の間を移動する場合を表し，第２項が領域 R_1 内の２つの需要点間の移動で，最後の項が領域 R_2 内の２つの需要点に対応するものである。後の２つの項は橋の位置 X の

決定には関与しないので

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+n}w_{ij}\{d(A_i,X)+d(X,A_j)\}$$

を最小にする位置 X を川を表す曲線上で選ぶ問題を考えることになる。これはさらに書き換えると

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m+n}w_i d(X,A_i)$$

となる。ここで

$$w_i=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=m+1}^{m+n}w_{ij}, & i=1,2,\cdots,m\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}w_{ij}, & i=m+1,m+2,\cdots,m+n\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{m}w_i=\sum_{i=m+1}^{m+n}w_i=W \quad （全需要量）$$

である。川を表す曲線を C とすると，問題は

<u>問題１</u>

$$\text{Minimize } F(X)=\sum_{i=1}^{m+n}w_i d(X,A_i)$$

$$\text{subject to } X\in C$$

となる。即ち，この問題は Weber 問題において配置が曲線上に制限されたものである。しかし，需要点と橋の間の経路は直線で表されるとは限らないので，通常の Weber 問題ではなく工夫をしなければならない。

3．特殊な場合の解析

一般的に考えるのは少し難しいので，簡単のため川を表す曲線として

$$y=f(x)$$

を考え，この関数が単調増加で凹関数であると仮定する。このとき領域

$$R_1=\{(x,y):y>f(x)\}$$

$$R_2=\{(x, y): y<f(x)\}$$

とすると，R_2 内の需要点に対しては X から見るとすべての需要点は可視である。ゆえに，直線距離で測れば良いことがわかる。また，R_1 内の需要点に対しては X から可視な部分だけとは限らず，不可視な部分が存在する。可視な部分の需要点は X との最短経路は直線経路であるが，不可視な部分の需要点 A_i に対しては，需要点 A_i から曲線（川）への接線を $P_i=(p_i,\ q_i)$ 引き接点をとすると 2 点 A_i と X の間の距離 $d(A_i,\ X)$ は直線距離 $d(A_i,\ P_i)$ と曲線の長さ $\widehat{d}(P_i,\ X)$ に分割される。(ここで，接点が 2 つ存在するときは X に近い方の接点を選ぶ。) すなわち，X から可視である需要点 A_i に対しては

$$d(A_i, X)=\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

であるが，不可視な需要点に対しては

$$d(A_i, X)=d(A_i, P_i)+\widehat{d}(P_i, X)$$

であり，

（1） $x<a_i$ なら

$$d(A_i, X)=\sqrt{(a_i-p_i)^2+(b_i-q_i)^2}+\int_x^{p_i}\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}\,du$$

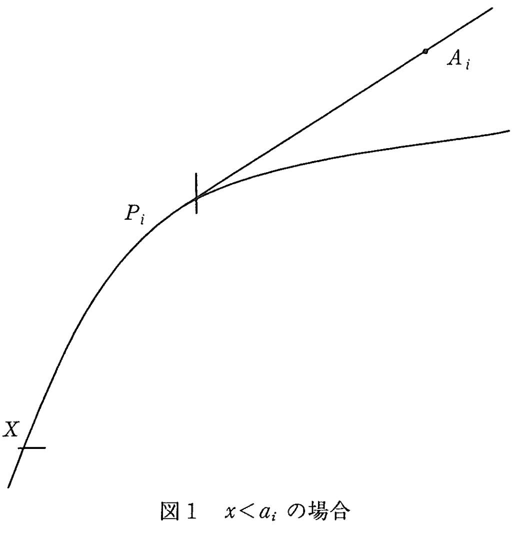

図 1　$x<a_i$ の場合

（2）$x > a_i$ なら

$$d(A_i, X) = \sqrt{(a_i - p_i)^2 + (b_i - q_i)^2} + \int_{p_i}^{x} \sqrt{1 + \{f'(u)\}^2}\, du$$

とあらわされる。

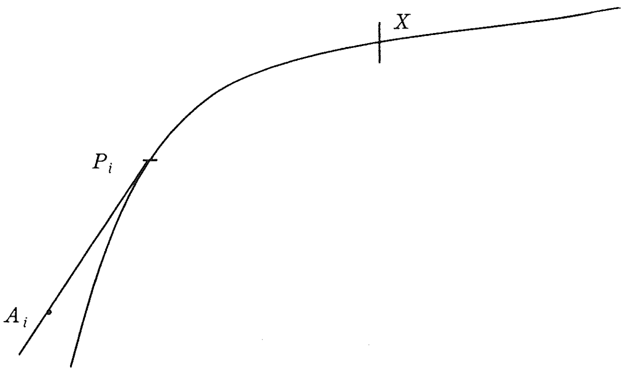

図2　$x > a_i$ の場合

どちらの場合も A_i が X から不可視であるときは接点 P_i が定まり，これは不可視である限り X の位置にはよらない。すなわち，

（1）　$x < a_i$ の場合は

$x < p_i$ となる X に対してはは A_i 必ず不可視となるが，$x \geq p_i$ となる X に対してはは A_i 必ず可視となる。

（2）　$x > a_i$ の場合は

$x > p_i$ となる X に対しては A_i は必ず不可視となるが，$x \leq p_i$ となる X に対しては A_i は必ず可視となる。

この関係を使うと，各需要点から川に引いた接線に対するすべての接点で川を区分けすると，各部分においてはすべての需要点は可視の需要点と不可視の需要点に一意に分けることができる。そこで，各需要点から川に引いたすべての接線を考える。接線が引けない場合はその需要点は川の上のすべての点からは可視である。ある町を考えているので川は無限に伸びていると考える必要は

なく，すべての需要点を含む凸包内に限定すれば十分であろう。(他に解は存在しないことは容易にわかる。) 多少，広く見積もって，すべての需要点が少なくとも表現される矩形領域を考えればよい。

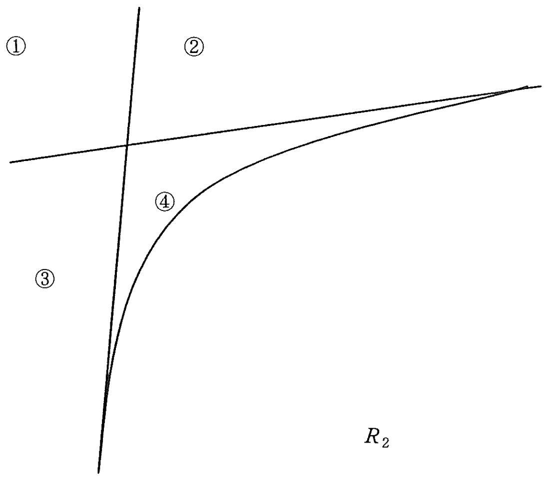

図3　R_1 の領域分け

図3のように R_1 を①，②，③，④の4つの領域に分けるとすると，領域①は図に表されている曲線からは可視となる領域で，②および③は接線が1本だけ引ける領域で，④は接線が2本引ける領域である。これらのすべての接点 P_1 を x座標の小さいものから並べ替えて

$$p_{(1)} < p_{(2)} < \cdots < p_{(k)}$$

とする。(同じ接点を共有する需要点は1つとは限らない。) 両端を含まない曲線上の区切られた部分 $S_{(i)}$，$i=1, \cdots, k-1$ に対して考える。ここで

$$S_{(i)} = \{(x, y) \in C : p_{(i)} < x < p_{(i+1)}\}$$

である。

1.　需要点 A_k が領域②に属する場合は A_k に対応する接点を $P_{(j)}$ とすると，$j \leq i$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から可視である。$j \geq i$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から不可視である。

2．　需要点 A_k が領域③に属する場合は A_k に対応する接点を $P_{(j)}$ とすると，$j \geq i+1$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から可視である。$j \leq i$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から不可視である。

3．　需要点 A_k が領域④に属する場合は A_k に対応する接点は２つ存在し，それらを $P_{(h)}$，$P_{(j)}$（ただし，$h<j$）とすると，$h \leq i$ かつ $j \geq i+1$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から可視である。$h \geq i+1$ または $j \leq i$ なら A_k は $S_{(i)}$ 上のすべての点から不可視である

以上のことを考え合わせて，曲線上の各区分 $S_{(i)}$ において可視となる需要点の集合 V_i と不可視となる需要点の集合 $\overline{V}_i$ に対して，

$$F(X)=\sum_{A_j \in V_i} w_j d(A_j, X)+\sum_{A_j \in \overline{V}_i} w_j \{d(A_j, P_j)+\hat{d}(P_j, X)\}$$

が区分上をどう変化するかを考える。$F(X)$ は曲線上ではの関数と表すことができる。

図４のように $P_{(i)}$ と $P_{(i+1)}$ で区切られた曲線の区分 $S_{(i)}$ に対し，R_1 を $R_{11}^{(i)}$ から $R_{16}^{(i)}$ の６つの領域に分割する。このとき，$R_{11}^{(i)}$ 上（境界を含む）の需要点

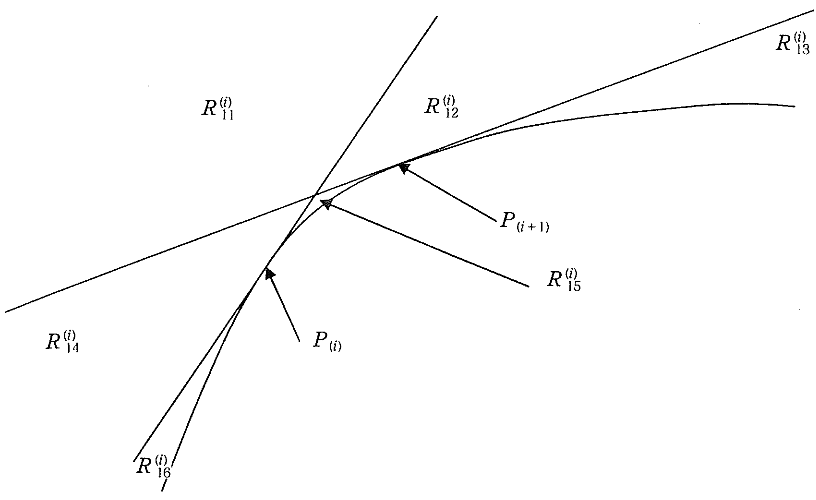

図４　区分 $S_{(i)}$ と可視性

はすべて可視であり，$R_{13}^{(i)}$ と $R_{16}^{(i)}$ 上の需要点は可視でない。また，$R_{12}^{(i)}$，$R_{14}^{(i)}$ および $R_{15}^{(i)}$ 内には需要点は存在しないことがわかる。(もし存在すれば，区分 $S_{(i)}$ 内に接点を持つ需要点であり，それらの需要点から $S_{(i)}$ 内に接点を持つ接線が存在することになるから矛盾する。) そこで，$R_{11}^{(i)}$ は上の区分 $S_{(i)}$ 上に制限して与えられた $F(X)$ においては V_i で，$\overline{V}_i$ は $R_{13}^{(i)}$ および $R_{16}^{(i)}$ であるので，$F(X)$ を xのみの関数として表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}F(x)=&\sum_{A_j\in R_{11}^{(i)}} w_j\sqrt{(x-a_j)^2+(f(x)-b_j)^2}\\&+\sum_{A_j\in R_{13}^{(i)}} w_j\left\{\sqrt{(a_j-p_j)^2+(b_j-q_j)^2}+\int_x^{p_i}\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}\,du\right\}\\&+\sum_{A_j\in R_{16}^{(i)}} w_j\left\{\sqrt{(a_j-p_j)^2+(b_j-q_j)^2}+\int_{p_i}^{x}\sqrt{1+\{f'(u)\}^2}\,du\right\}\end{aligned}$$

それゆえ，この区分 $S_{(i)}$ 上で xの変化に対する $F(x)$ の変化を考えると，

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx}=&\sum_{A_j\in R_{11}^{(i)}} w_j\frac{(x-a_j)+(f(x)-b_j)f'(x)}{\sqrt{(x-a_j)^2+(f(x)-b_j)^2}}\\&+\left(\sum_{A_j\in R_{16}^{(i)}} w_j-\sum_{A_j\in R_{13}^{(i)}} w_j\right)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\end{aligned}$$

となる。この右辺の第1項において，曲線上の点 $(x, f(x))$ の法線で $R_{16}^{(i)}$ を区切ると，図5のように破線で正負の領域に分けることができ，正の領域に入る需要点に対しては $\dfrac{(x-a_j)+(f(x)-b_j)f'(x)}{\sqrt{(x-a_j)^2+(f(x)-b_j)^2}}$ は正の値を取り，負の領域に入れば負の値を取る。またここで，明らかに xの増加に伴って正の項が増えることもわかる。また第2項では $\sum_{A_j\in R_{16}^{(i)}} w_j-\sum_{A_j\in R_{13}^{(i)}} w_j$ は区分 $S_{(i)}$ 上では変化せず一定で，$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ は xの増加に伴って単調減少することがわかる。それゆえ，区分 $S_{(i)}$ 上では点 $P_{(i)}$ および $P_{(i+1)}$ において $\dfrac{dF}{dx}<0$ かつ $\sum_{A_j\in R_{16}^{(i)}} w_j-\sum_{A_j\in R_{13}^{(i)}} w_j\leq 0$ ならばこの区分 $S_{(i)}$ には解は存在しないことがわかり，$\dfrac{dF}{dx}<0$ かつ $\sum_{A_j\in R_{16}^{(i)}} w_j-\sum_{A_j\in R_{13}^{(i)}} w_j>0$ ならば最小値を与える候補となる解は存在する可能性がある。ま

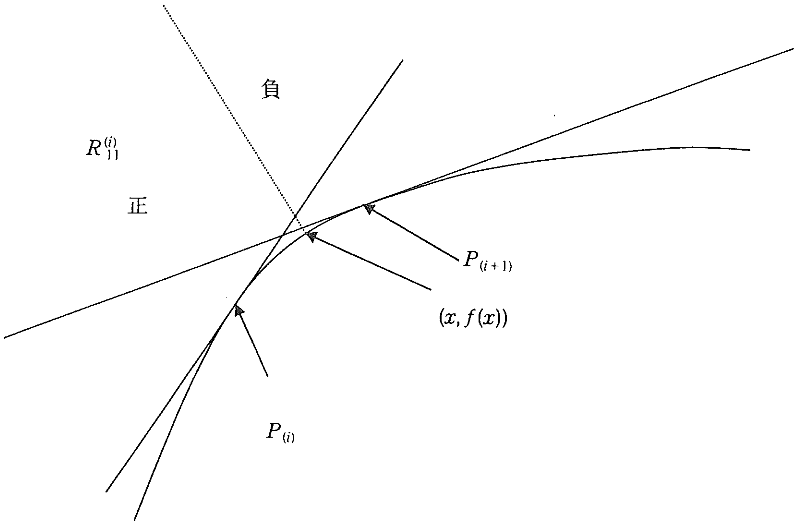

図5　領域と符号

た，点お $\mathrm{P}_{(i)}$ よびに $P_{(i+1)}$ おいて $\dfrac{dF}{dx}$ の符号が異なれば，区分 $S_{(i)}$ 内に $\dfrac{dF}{dx}=0$ を与える解（すなわち最小値を与える候補解）は存在する。以上の中で最適解の候補を与える解が存在する区分ではさらに区分内を詳細に調べ $\dfrac{dF}{dx}=0$ を与える解を求める。この探索は1変数 x の関数であるのでそれほど困難ではないであろう。

4．おわりに

本論文では，川の形状を $y=f(x)$ として単調増加な凹関数と考えて議論してきたが，多少の拡張なら強引に計算もできるが，もっと一般の場合についてはこの延長で考えると非常に複雑になる。複数の橋を設置することについては，各需要点からの最も近い橋を選ぶことに工夫が必要と思われるが，この延長として考えられるであろう。なお，本研究は神戸学院大学経済学会の研究助成による研究である。

参 考 文 献

[1] 塩出省吾：直線状の障壁に対する横断点の最適配置問題，神戸学院経済学論集第30巻，第1・2号，pp. 115-122 (Sept. 1998).

[2] Butt, S. E. and T. M. Cavalier: "An Efficient Algorithm for Facility Location in the Presence of Forbidden Regions", *European Journal of Operational Research*, Vol. 90, pp. 56-70 (1996)

[3] Chen, Y. and P. Ramanan: "Euclidean Shortest Path in the Presence of Obstacles", *Networks*, Vol. 21, pp. 257-265 (1991)

[4] Lee, D. T. and F. P. Preparata: "Euclidean Shortest Paths in the Presence of Rectilinear Barriers", *Networks*, Vol. 14, pp. 393-401 (1984)