ホテル予約受付方策の数理モデルに関する一考察

小出　武
石井博昭

1 はじめに

本研究の目的は，ホテル産業における最適なオーバーブック方策を数理的な手法を用いて導出することである。目的を遂行するため，ホテル予約業務に関する数理モデルを構築し，期待総利益をオーバーブック数の関数として定式化し，オーバーブックの数量が期待総利益に対しどのように影響するのか確認すべく数理的な解析を行う。本研究で扱うモデルでは，早期割引料金と客室のアップグレードを導入しているのが大きな特徴である。

本研究は，欧米を中心に盛んに研究されているイールド・マネジメントの一種である。イールド・マネジメントとは，数量が固定された商品に対し，利用条件や価格の異なる販売方法を組み合わせることによって，利益を最大にする行為の総称である [7,16]。イールド・マネジメントの研究は，航空業界を対象として研究が盛んに行われている。現在ではホテル産業や運輸業，スポーツなど，主にサービス産業をはじめとする他の業種を対象とした研究も行われている [10]。

イールド・マネジメントの研究分野の中心的な主題の一つとしてオーバーブックが挙げられる。オーバーブックとは，将来キャンセルされることを想定して供給できる数量以上の予約を受け付けることを言う。供給者の予測よりキャンセル件数が少ない場合，一部の客は商品を購入できないこととなる。その場

合は大抵何らかの補償を付けた上で，代替の商品を提供したり購入をあきらめて頂いたりする。ある程度のオーバーブックは収益を上げる上で有効な手段である。しかし過度なオーバーブックは補償費用の増大を招き収益を下げる。適切なオーバーブック方策に関する研究は，イールド・マネジメントの一分野として広く研究されている。

ホテルを対象としたイールド・マネジメントの研究は Rothstein によるオーバーブックに関する研究がその始まりである [19]。その後，数々の現実問題に対応するために様々な研究が行われた。例えば，Bitran と Mondschien は連泊者を重視するモデルを考案し [3]，Bitran と Gilbert は宿泊日当日に予約なしに来客する確率を考慮した上で，時刻経過によって判断基準を動的に変化させる方策を提案した [4]。また Badinelli [1] は一般分布の到着過程で表される需要パターンに対しても適用できる動的判断基準を提案した。

本稿では，インターネットを利用したホテル予約販売を念頭においた最適予約受付方策を導くための数理モデルを構築する。本モデルでは，客室に対する需要を一般分布とする。インターネットを利用した販売方法はこれまでに十分な実績がないことが多く，正確な需要予測が困難であるため，任意の形状の需要分布を適用できるモデルが必要とされるからである。またインターネットを利用した客室販売においてよく用いられるのが早期割引料金の提供である。Koide and Ishii は早期割引を考慮したホテルオーバーブック方策に関するモデルを構築し，期待総利益をオーバーブックの数量と早期割引の対象となる客室数との関数として定式化し，関数の形状を特徴付けるための条件を導出した [14]。本稿では先の研究を拡張し，扱う客室の種類を1種類から2種類に増やし，アップグレードをモデルに組み込む。アップグレードとは，予約した客室より上級の部屋に追加料金なしで移ってもらう行為のことで，現実にホテル業界ではよく行われている。このモデルにおいて期待総利益を定式化し，オーバーブックの数量や早期割引部屋数などが期待総利益に対しどのように影響するのかを分析する。

2 準　　備

2.1 モデルの設定

ホテルの客室の種類はシングルとツインの２種類とする。シングルは通常料金に加え早期割引料金での販売を行う。ツインは通常料金のみとする。

本モデルにおける予約受付業務を，図１を用いて説明する。時刻 t_0 は予約受付期限である。予約は時刻 t_3 から受付を開始する。

時刻 t_2 までにシングルを予約する場合，客は早期割引料金（以下，SL クラスと呼ぶ）での予約が可能である。SL クラスの料金は通常料金（以下 SH クラスとする）より低いが，予約をキャンセルすることはできない。またSLクラスの客室数は予め一定数に設定されているため，時刻 t_2 以前であってもSLクラス用に割り当てた部屋が売り切れた場合は予約できない。時刻 t_2 を過ぎてもSLクラスが完売できなかった場合，ホテルは余った客室を SH クラス用として転売する。

一方 SH クラスは，時刻 t_3 から時刻 t_1 までの全期間で予約が可能である。SH クラスを予約した客は，時刻 t_1 まで（期間 T_3 および T_2 内）であれば無償で予約をキャンセルすることができる。時刻 t_1 を過ぎた場合（期間 T_1 内），予約をキャンセルすることはできない。

ツインは SL クラスと同様全期間で予約が可能である。本研究では，解析上の都合によりツインの予約はキャンセルできないと仮定した。

ホテルは期間 T_3，T_2 における SH クラスの予約についてオーバーブックを行う。キャンセル期限である時刻 t_1 を過ぎた時点で，ホテルが想定するほどキャンセルが発生しなかった場合，供給できる客室数を上回る客室が必要となる。

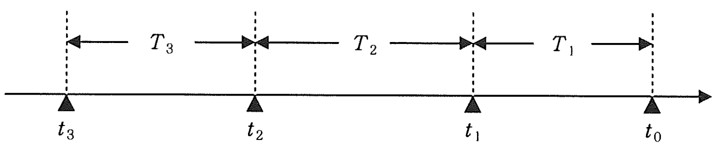

図１．予約業務に関する時刻と期間

もしツインに空きがあれば，ホテルはツインへのアップグレードを行う。アップグレードを行ってもなお客室が足りない場合は，ウォーキングが発生する。ウォーキングとは，予約客の宿泊を断る行為を指す。ウォーキングとなった予約客には，代わりのホテルを手配したりお詫びの特典を提供したりする補償費用が必要となる。期間 T_1 での予約はキャンセルできないので，期間 T_1 ではオーバーブックを実施しない。つまり客室に空きがあれば受け付け，なければ予約を断るものとする。

本研究ではノーショーは考えない。ノーショーとは，予約をしたものの宿泊当日になっても現れない客のことである。ノーショーはキャンセルと同様にオーバーブックの必要性を生み，予約管理業務を困難にさせる要因の一つである。しかし現在インターネットを利用したホテルの予約にクレジットカードの利用が通常となったように，近い将来には本人の認証ができる決済手段であるクレジットカードや電子貨幣を利用して，ノーショーの客から客室料金を請求できるのが通常になると考えられる。そのため本研究ではノーショーの客は来客したものとして扱う。

本研究では時刻 t_1 まで（期間 T_3，T_2）に行う予約受付業務におけるオーバーブック方策を研究対象とする。そのため需要や利益計算の対象は期間 T_3, T_2 とし，期間 T_1 は対象から外す。また期間 T_3 における需要と比して SH クラスの客室数は十分に大きいとし, SL クラスより先に SH クラスが売り切れてしまうことがないと仮定する。各クラスに対する需要の確率分布関数，および確率密度関数が与えられているものとする。需要は他のクラスと独立であると仮定し，連続値で近似する。

2.2 記号の定義

R_{SL}　SL クラスでのシングル一客室あたりの販売利益（$0<R_{SL}$）

R_{SH}　SH クラスでのシングル一客室あたりの販売利益（$R_{SL}<R_{SH}$）

R_T　ツイン一客室あたりの販売利益（$0<R_T$）

C　ウォーキング1件あたりの補償費用（$0<C$）

Y_S　シングルの総客室数（$0<Y_S$）

Y_T　ツインの総客室数（$0<Y_T$）

Y　シングルとツインの客室数合計。Y_S+Y_T

p　SH クラス予約者のキャンセル確率

q　$1-p$

w　ウォーキング件数

y　SL クラスで販売するシングル客室数上限（$0\leq y<Y_S$）

z　SH クラスでのオーバーブッキング上限（$0\leq z$）

x_{SL}　期間 T_3，T_2 における SL クラスの予約件数

x_{SH}　期間 T_3，T_2 における SH クラスの予約件数

x_T　期間 T_3，T_2 におけるツイン部屋の予約件数

D_{SL}　期間 T_3，T_2 における SL クラスに対する需要（確率変数）

D_{SH}　期間 T_3，T_2 における SH クラス対する需要（確率変数）

D_T　期間 T_3，T_2 におけるツイン部屋の需要（確率変数）

$F_{SL}(v), F_{SH}(u), F_T(t)$　D_{SL}, D_{SH}, D_T の確率分布関数
連続で $(-\infty, 0]$ にて0をとると仮定

$f_{SL}(v), f_{SH}(u), f_T(t)$　D_{SL}, D_{SH}, D_T の確率密度関数

$E(X)$　X の期待値

R　総利益

$\bar{F}(x)=1-F(x)$

$[a]^+=\max(a,0)$

3　定　式　化

早期割引料金（タイプ SL）の予約受付数 x_{SL} は次のように表される。

$$x_{SL}=\min(D_{SL}, y). \tag{1}$$

タイプ SH 用として販売されるシングル客室数は，$Y_S-\min(D_{SL}, y)$ となるの

で，タイプSHの予約受付数 x_{SH} は，

$$x_{SH}=\min(D_{SH},\ Y_S+z-\min(D_{SL},\ y)) \tag{2}$$

となる。一方，ツインの予約受付数 x_T は

$$x_T=\min(D_T,\ Y_T) \tag{3}$$

となるので，ツインの売れ残り部屋数は $[Y_T-D_T]^+$ となる。

以上の結果を用いて予約受付数の期待値 $E(x_{SL})$, $E(x_{SH})$, $E(x_T)$ は以下のように表現される。

$$E(x_{SL})=\int_0^y vdF_{SL}(v)+\int_y^\infty ydF_{SL}(v)=y-\int_0^y F_{SL}(v)\,dv, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}E(x_{SH})&=\int_0^y dF_{SL}(v)\left\{\int_0^{Y_S+z-v}udF_{SH}(u)+\int_{Y_S+z-v}^\infty (Y_S+z-v)\,dF_{SH}(u)\right\}\\&\quad+\int_y^\infty dF_{SL}(v)\left\{\int_0^{Y_S+z-y}udF_{SH}(u)+\int_{Y_S+z-y}^\infty (Y+z-y)\,dF_{SH}(u)\right\}\\&=\int_0^y dF_{SL}(v)\left\{Y_S+z-v-\int_0^{Y_S+z-v}F_{SH}(u)\,du\right\}\\&\quad+\overline{F}_{SL}(y)\left\{Y_S+z-y-\int_0^{Y_S+z-y}F_{SH}(u)\,du\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

$$E(x_T)=\int_0^{Y_T}tdF_T(t)+\int_{Y_T}^\infty Y_T dF_T(t)=Y_T-\int_0^{Y_T}F_T(t)\,dt. \tag{6}$$

オーバーブッキングのためシングルに宿泊できないシングル予約者は，

$$\begin{aligned}&[x_{SL}+qx_{SH}-Y_S]^+\\&=[\min(D_{SL},\ y)+q\min(D_{SH},\ Y_S+z-\min(D_{SL},\ y))-Y_S]^+\end{aligned} \tag{7}$$

となるので，ウォーキング数 w は以下のように表される。

$$\begin{aligned}w&=[[\min(D_{SL},\ y)+q\min(D_{SH},\ Y_S+z-\min(D_{SL},\ y))-Y_S]^+\\&\quad-[Y_T-D_T]^+]^+\\&=[\min(D_{SL},\ y)+q\min(D_{SH},\ Y_S+z-\min(D_{SL},\ y))\\&\quad-Y_S-[Y_T-D_T]^+]^+\end{aligned} \tag{8}$$

したがって，$z\le\dfrac{p}{q}(Y_S-y)$ のとき，

$$\begin{aligned}w&\le[\min(D_{SL},\ y)+q(Y_S+z-\min(D_{SL},\ y))-Y_S-[Y_T-D_T]^+]^+\\&\le[py+q(Y_S+z)-Y_S-[Y_T-D_T]^+]^+\le[-[Y_T-D_T]^+]^+=0\end{aligned} \tag{9}$$

より，$w=0$ となる。

残る $z>\frac{p}{q}(Y_S-y)$ の場合について，$w>0$ となる条件を D_{SL}, D_{SH}, D_T を用いて列挙する。

（i） $Y_S-\frac{q}{p}z<D_{SL}\leq y$ のとき

A． $\frac{1}{q}(Y_S-D_{SL})<D_{SH}\leq Y_S+z-D_{SL}$ のとき

(a) $Y-D_{SL}-qD_{SH}<D_T\leq Y_T$ のとき， $w=D_{SL}+qD_{SH}+D_T-Y.$

(b) $D_T>Y_T$ のとき， $w=D_{SL}+qD_{SH}-Y_S.$

B． $D_{SH}>Y_S+z-D_{SL}$ のとき

(a) $Y-D_{SL}-q(Y_S+z-D_{SL})<D_T\leq Y_T$ のとき，

$w=D_{SL}+q(Y_S+z-D_{SL})+D_T-Y.$

(b) $D_T>Y_T$ のとき， $w=D_{SL}+q(Y_S+z-D_{SL})-Y_S.$

（ii） $D_{SL}>y$ のとき

A． $\frac{1}{q}(Y_S-y)<D_{SH}\leq Y_S+z-y$ のとき

(a) $Y-y-qD_{SH}<D_T\leq Y_T$ のとき， $w=y+qD_{SH}+D_T-Y.$

(b) $D_T>Y_T$ のとき， $w=y+qD_{SH}-Y_S.$

B． $D_{SH}>Y_S+z-y$ のとき

(a) $Y-y-q(Y_S+z-y)<D_T\leq Y_T$ のとき，

$w=y+q(Y_S+z-y)+D_T-Y.$

(b) $D_T>Y_T$ のとき， $w=y+q(Y_S+z-y)-Y_S.$

したがって，期待ウォーキング件数 $E(w)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}E(w)=&\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y}dF_{SL}(v)\Bigg[\int_{\frac{Y_S-v}{q}}^{Y_S+z-v}dF_{SH}(u)\left\{v+qu-Y_S-\int_{Y-v-qu}^{Y_T}F_T(t)\,dt\right\}\\&+\overline{F}_{SH}(Y_S+z-v)\left\{v+q(Y_S+z-v)-Y_S-\int_{Y-v-q(Y_S+z-v)}^{Y_T}F_T(t)\,dt\right\}\Bigg]\\&+\overline{F}_{SL}(y)\Bigg[\int_{\frac{Y_S+z-y}{q}}^{Y_S+z-y}dF_{SH}(u)\left\{y+qu-Y_S-\int_{Y-y-qu}^{Y_T}F_T(t)\,dt\right\}\\&+\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)\left\{y+q(Y_S+z-y)-Y_S-\int_{Y-y-q(Y_S+z-y)}^{Y_T}F_T(t)\,dt\right\}\Bigg].\quad(10)\end{aligned}$$

最後に，期待総利益は次のように表される。

$$E(R)=R_{SL}E(x_{SL})+R_{SH}E(qx_{SH}-w)-CE(w)$$
$$=R_{SL}E(x_{SL})+qR_{SH}E(x_{SH})-(R_{SH}+C)E(w). \tag{11}$$

4　期待総利益の解析

4.1　オーバーブッキング上限に関する解析

オーバーブッキング上限zに関する総期待利益$E(R)$の振る舞いを解析する。まず$E(x_{SL})$，$E(x_{SH})$，$E(x_T)$をzで偏微分すると，式(4)，(5)，(6)より

$$\frac{\partial E(x_{SL})}{\partial z}=\frac{\partial E(x_T)}{\partial z}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial E(x_{SH})}{\partial z}=\int_0^y dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y) \tag{13}$$

となる。

したがって，$z\leq\frac{p}{q}(Y_S-y)$なるzの範囲では，

$$\frac{\partial E(R)}{\partial z}=qR_{SH}\left\{\int_0^y dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)\right\}\geq 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 E(R)}{\partial z^2}=-qR_{SH}\left\{\int_0^y dF_{SL}(v)f_{SH}(Y_S+z-v)+\bar{F}_{SL}(y)f_{SH}(Y_S+z-y)\right\}\leq 0 \tag{15}$$

となる。よって，$E(R)$はzに関して単調非減少凹関数である。

一方$z>\frac{p}{q}(Y_S-y)$の場合，$E(w)$をzで偏微分すると，

$$\frac{1}{q}\frac{\partial E(w)}{\partial z}=\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y} dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)\bar{F}_T(Y-v-q(Y_S+z-v))$$
$$+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)\bar{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y)) \tag{16}$$

となる。したがって，

$$\frac{1}{q}\frac{\partial E(R)}{\partial z}=R_{SH}\left\{\int_0^y dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)\right\}$$

$$-(R_{SH}+C)\left\{\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y} dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)\bar{F}_T(Y-v-q(Y_S+z-v))\right.$$

$$\left.+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)\bar{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\right\}$$

$$=R_{SH}\int_0^{Y_S-\frac{q}{p}z} dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)$$

$$+\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y} dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-v)G(Y-v-q(Y_S+z-v))$$

$$+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)G(Y-y-q(Y_S+z-y)), \tag{17}$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial^2 E(R)}{\partial z^2}=-R_{SH}\int_0^{Y_S-\frac{q}{p}z} dF_{SL}(v)f_{SH}(Y_S+z-v)$$

$$-q(R_{SH}+C)\left\{\frac{1}{p}f_{SL}\left(Y_S-\frac{q}{p}z\right)\bar{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)\bar{F}_T(Y_T)\right.$$

$$+\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y} dF_{SL}(v)\bar{F}_{SH}(Y_s+z-v)f_T(Y-v-q(Y_S+z-v))$$

$$\left.+\bar{F}_{SL}(y)\bar{F}_{SH}(Y_S+z-y)f_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\right\}$$

$$-\int_{Y_S-\frac{q}{p}z}^{y} dF_{SL}(v)f_{SH}(Y_S+z-v)G(Y-v-q(Y_S+z-v))$$

$$-F_{SL}(y)f_{SH}(Y_S+z-y)G(Y-y-q(Y_S+z-y)) \tag{18}$$

となる。ここで $G(g)=R_{SH}-(R_{SH}+C)\bar{F}_T(g)$ である。

$G(Y-v-q(Y_s+z-v))$ は,

$$\frac{\partial}{\partial v}G(Y-v-q(Y_S+z-v))=-p(R_{SH}+C)f_T(Y-v-q(Y_S+z-v))\leq 0 \tag{19}$$

より v に関して非増加関数である。よって $G(Y-v-q(Y_S+z-v))|_{v=y}\geq 0$, つまり

$$z\leq\frac{p}{q}(Y_S-y)+\frac{Y_T}{q}-\frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right) \tag{20}$$

ならば $E(R)$ は z に関して単調非減少凹関数となる。

また式(17)より $Y_S-\frac{q}{p}z\leq 0$, かつ $G(Y-v-q(Y_S+z-v))|_{v=0}\leq 0$, 換言すると

$$\frac{p}{q}Y_S\leq z,\quad \text{かつ}\quad \frac{p}{q}Y_S+\frac{Y_T}{q}-\frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right)\leq z \tag{21}$$

ならば$E(R)$はzに関して単調非増加関数となる。

$E(R)$を最大にするzをz^*とする。以上の結果をまとまると以下の定理を得る。

定理 1 zに関する期待総利益$E(R)$の増減，およびz^*の存在範囲に関して以下のことがいえる。

（i） $\dfrac{C}{R_{SH}+C}\leq F_T(Y_T)$ のとき，

$z\leq\dfrac{p}{q}(Y_S-y)+\dfrac{Y_T}{q}-\dfrac{1}{q}F_T^{-1}\left(\dfrac{C}{R_{SH}+C}\right)$ で単調非減少凹関数，

$\dfrac{p}{q}Y_S+\dfrac{Y_T}{q}-\dfrac{1}{q}F_T^{-1}\left(\dfrac{C}{R_{SH}+C}\right)\leq z$ で単調非増加関数で，

$$z^*\in\left(\frac{p}{q}(Y_S-y)+\frac{Y_T}{q}-\frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right),\ \frac{p}{q}Y_S+\frac{Y_T}{q}-\frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right)\right). \tag{22}$$

（ii） $F_T(Y_T)<\dfrac{C}{R_{SH}+C}$ のとき，

$z\leq\dfrac{p}{q}(Y_S-y)$ で単調非減少凹関数，$\dfrac{p}{q}Y_S\leq z$ で単調非増加関数で

$$z^*\in\left(\frac{p}{q}(Y_S-y),\quad \frac{p}{q}Y_S\right). \tag{23}$$

4.2 早期割引対象部屋数に関する解析

続いて，早期割引販売用客室数の上限yに関して総期待利益$E(R)$を解析する。$E(x_{SL})$，$E(x_{SH})$，$E(x_T)$をyで偏微分すると，式(4)，(5)，(6)より

$$\frac{\partial E(x_{SL})}{\partial y}=F_{SL}(y), \tag{24}$$

$$\frac{\partial E(x_{SH})}{\partial y}=-F_{SL}(y)F_{SH}(Y_S+z-y), \tag{25}$$

$$\frac{\partial E(x_T)}{\partial y}=0 \tag{26}$$

となる。

$z\le\frac{p}{q}(Y_S-y)$ を変形すると $y\le Y_S-\frac{q}{p}z$ となる。$Y_S-\frac{q}{p}z\ge 0$ つまり $z\le\frac{p}{q}Y_S$ のとき，$0\le y\le Y_S-\frac{q}{p}z$ なる y の範囲では，

$$\frac{\partial E(R)}{\partial y}=F_{SL}(y)\{R_{SL}-qR_{SH}F_{SH}(Y_S+z-y)\} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 E(R)}{\partial y^2}=-f_{SL}(y)\{R_{SL}-qR_{SH}F_{SH}(Y_S+z-y)\}-qR_{SH}F_{SL}(y)f_{SH}(Y_S+z-y) \tag{28}$$

となる。$F_{SL}(y)\ge 0$, かつ $R_{SL}-qR_{SH}F_{SH}(Y_S+z-y)$ が y について非増加関数であることを考慮すると，$0\le y\le Y_S-\frac{q}{p}z$ の範囲において以下の結論を得る。

（i） $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)\big|_{y=Y_S-\frac{q}{p}z}\ge 0$,

つまり $\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)\le\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}$ のとき，

$E(R)$ は y について単調非減少凹関数．

（ii） $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)\big|_{y=0}\le 0$,

つまり $\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}\le\overline{F}_{SH}(Y_S+z)$ のとき，

$E(R)$ は y について単調非増加関数．

（iii） その他の場合，つまり $\overline{F}_{SH}(Y_S+z)<\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}<\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)$ のとき，

$E(R)$ は単峰関数.

次に $z\le\frac{p}{q}Y_S$ のときの $Y_S-\frac{q}{p}z<y<Y_S$ の範囲と $z>\frac{p}{q}Y_S$ のときの $0\le y<Y_S$ の範囲について，$E(w)$ を y で偏微分すると，

$$\frac{\partial E(w)}{\partial y}=\overline{F}_{SL}(y)\left\{\int_{\frac{Y_S-y}{q}}^{Y_S+z-y}dF_{SH}(u)\overline{F}_T(Y-y-qu)\right.$$
$$\left.+p\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)\overline{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\right\} \tag{29}$$

となる。よって，

$$\frac{\partial E(R)}{\partial y}=F_{SL}(y)\varphi \tag{30}$$

となる。ただし，

$$\varphi=R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)-(R_{SH}+C)\left\{\int_{\frac{Y_S-y}{q}}^{Y_S+z-y}dF_{SH}(u)\overline{F}_T(Y-y-qu)\right.$$

$$\left.+p\overline{F}_{SH}(Y_S+z-y)\overline{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\right\} \quad (31)$$

である。以下，φ の特性を調べる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-qf_{SH}(Y_S+z-y)\{R_{SH}-(R_{SH}+C)\overline{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\}$$

$$-(R_{SH}+C)\left\{\frac{1}{q}f_{SH}\left(\frac{Y_S-y}{q}\right)\overline{F}_T(Y_T)+\int_{\frac{Y_S-y}{q}}^{Y_S+z-y}dF_{SH}(u)f_T(Y-y-qu)\right.$$

$$\left.+p^2F_{SH}(Y_S+z-y)f_T(Y-y-q(Y_S+z-y))\right\}. \quad (32)$$

ここで $R_{SH}-(R_{SH}+C)\overline{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))$ は y について非増加関数である。よって，φ が y に関して単調非増加になるための必要条件は

$R_{SH}-(R_{SH}+C)\overline{F}_T(Y-y-q(Y_S+z-y))|_{y=Y_S}\geq 0$, つまり

$$F_T(Y_T-qz)\geq\frac{C}{R_{SH}+C} \quad (33)$$

である。

この条件下で $z\leq\frac{p}{q}Y_S$ のとき，

$$\lim_{y\downarrow Y_S-\frac{q}{p}z}\varphi=R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)-p(R_{SH}+C)\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)\overline{F}_T(Y_T) \quad (34)$$

となるので $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)\leq 0$, つまり $\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)\geq\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}$ ならば，$E(R)$ は $Y_S-\frac{q}{p}z<y<Y_S$ にて単調非増加関数である。逆に $\overline{F}_{SH}\left(\frac{z}{p}\right)<\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}$ のとき，

$$\lim_{y\uparrow Y_S}\varphi=R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(z)-(R_{SH}+C)$$

$$\times\left\{\int_0^z dF_{SH}(u)\overline{F}_T(Y_T-qu)+p\overline{F}_{SH}(z)\overline{F}_T(Y_T-qz)\right\} \quad (35)$$

なので $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(z)<0$, つまり $\overline{F}_{SH}(z)>\frac{1}{q}\frac{R_{SL}}{R_{SH}}$ ならば，$E(R)$ は $Y_S-\frac{q}{p}z<y<Y_S$ にて単峰である。

次に $z>\dfrac{p}{q}Y_S$ の場合，

$$\varphi\,|_{y=0}=R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(Y_S+z)-(R_{SH}+C)$$
$$\times\left\{\int_{\frac{Y_S}{q}}^{Y_S+z}dF_{SH}(u)\overline{F}_T(Y-qu)+p\overline{F}_{SH}(Y_S+z)\overline{F}_T(Y-q(Y_S+z))\right\} \qquad (36)$$

となるので $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(Y_S+z)\leq 0$，つまり $\overline{F}_{SH}(Y_S+z)\geq\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ ならば $E(R)$ は $0\leq y<Y_S$ にて単調非増加関数である。逆に $\overline{F}_{SH}(Y_S+z)\geq\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ のときは，式(35)より $R_{SL}-qR_{SH}\overline{F}_{SH}(z)<0$，つまり $\overline{F}_{SH}(z)>\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ ならば，$E(R)$ は $0\leq y<Y_S$ にて単峰である。

$E(R)$ を最大にする y を y^* とする。以上の結果をまとめると以下の定理を得る。

定理 2　$F_T(Y_T-qz)\geq\dfrac{C}{R_{SH}+C}$ のとき，y に関する期待総利益 $E(R)$ の増減，および y^* の存在範囲に関して以下のことがいえる。

A．$z\leq\dfrac{p}{q}Y_S$ のとき

（i）$\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}\leq\overline{F}_{SH}(Y_S+z)$ のとき，$E(R)$ は単調非増加関数で，$y^*=0$。

（ii）$\overline{F}_{SH}(Y_S+z)<\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}<\overline{F}_{SH}\left(\dfrac{z}{p}\right)$ のとき，$E(R)$ は単峰関数で

$y^*=Y_S+z-F_{SH}^{-1}\left(1-\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}\right)$．ここで $y^*\in\left(0,\ Y_S-\dfrac{q}{p}z\right)$ である。

（iii）$F_{SH}\left(\dfrac{z}{p}\right)\leq\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ のとき，$\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}<F_{SH}(z)$ ならば $E(R)$ は単峰で，

y^* は $\varphi=0$ の解である。ここで $y^*\in\left(Y_S-\dfrac{q}{p}z,\ Y_S\right)$ である。

B．$z>\dfrac{p}{q}Y_S$ のとき

（i）$\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}\leq F_{SH}(Y_S+z)$ のとき，$E(R)$ は単調非増加関数で，$y^*=0$。

（ii）$\overline{F}_{SH}(Y_S+z)<\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ のとき，$\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}<\overline{F}_{SH}(z)$ ならば $E(R)$ は単峰関数で，

y^* は $\varphi=0$ の解である。ここで $y^*\in(0,\ Y_S)$ である。

4.3 考　　察

$z \leq \frac{p}{q}(Y_S - y)$ のとき，式(9)より $w=0$ となる。これはSHクラスの予約客はすべてSHクラスに宿泊でき，ウォーキングが発生するリスクがないことを意味する。よって $z \leq \frac{p}{q}(Y_S - y)$ では，z を大きくするほど $E(R)$ が大きくなることが分かる。また $\frac{p}{q}Y_S + \frac{Y_T}{q} < z$ の条件下でオーバーブックの上限まで予約を受け付けた場合，

$$qx_{SH} = q(Y_S + z - x_{SL}) > Y_S + Y_T - qx_{SL} > Y_S + Y_T - x_{SL} \tag{37}$$

となり，ツインへのアップグレードを行っても確実にウォーキングが発生する。したがって $\frac{p}{q}Y_S + \frac{Y_T}{q} < z$ では，z を大きくすると $E(R)$ が小さくなることが分かる。これらの考察から，z^* の上下界

$$z^* \in \left(\frac{p}{q}(Y_S - y),\ \frac{p}{q}Y_S + \frac{Y_T}{q}\right) \tag{38}$$

を得る。この上下界と比較すると，定理1がより精度の良い上下界を与えていることが分かる。

式(22)より，$F_T(Y_T) - \frac{C}{R_{SH}+C}$ が大きくなるほど上下界が大きくなることが分かる。つまりツイン客室が売れ残る確率が高いほど，またウォーキングによる補償費用が安く見積もれるほど，最適なオーバーブック数の存在範囲が大きくなることになる。ツイン客室が売れ残る確率が高く，ウォーキングの補償費用が安い場合にはウォーキングの相対的なリスクが小さくなり，オーバーブックを積極的に実行しやすくなることをこの結果は表している。

式(22)と(23)とを比較すると，上下界の差はともに $\frac{p}{q}y$ であり，y に依存することがわかる。よって $y=0$，つまりSLクラスの販売を行わない場合，

$$z^* = \frac{p}{q}Y_S + \left[\frac{Y_T}{q} - \frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right)\right]^+ \tag{39}$$

となり，$F_T(Y_T) - \frac{C}{R_{SH}+C}$ が大きくなるほど z^* が大きくなる。

一方 y に関する $E(R)$ の増減を示すためには，ツイン客室の需要に関する条

件，$F_T(Y_T-qz) \geq \dfrac{C}{R_{SH}+C}$ が必要であった。この条件は，ツイン客室需要がある一定水準以上あること，またはウォーキング補償費用がある水準より低いことを表している。また $F_T(Y_T-qz) \geq \dfrac{C}{R_{SH}+C}$ を変形すると，

$$\frac{Y_T}{q} - \frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right) \geq z \tag{40}$$

となる。つまり $F_T(Y_T-qz) \geq \dfrac{C}{R_{SH}+C}$ が成立するには，z が一定値以下である必要があることが分かる。更に $F_T(Y_T-qz) \geq \dfrac{C}{R_{SH}+C}$ ならば $F_T(Y_T-qz) \geq \dfrac{C}{R_{SH}+C}$ となるので，定理１より式(40)の範囲では $E(R)$ は z に関して単調非減少凹関数である。よって，

$$z^* = \frac{Y_T}{q} - \frac{1}{q}F_T^{-1}\left(\frac{C}{R_{SH}+C}\right) \tag{41}$$

となる。

また y^* は $\dfrac{1}{q}\dfrac{R_{SL}}{R_{SH}}$ と $\overline{F}_{SH}(z), \overline{F}_{SH}\left(\dfrac{z}{p}\right), \overline{F}_{SH}(Y_S+z)$ との大小関係によってその値，または存在範囲が変化する。z が増加すると $\overline{F}_{SH}(z), \overline{F}_{SH}\left(\dfrac{z}{p}\right), \overline{F}_{SH}(Y_S+z)$ は減少するので，定理２より y^* は増加することが予想される。このことは，z を増加させるとウォーキングのリスクが高まるため，利益を増加させるには確実に来客するSLクラスへの客室割当数yを増加させる方が好ましいことを表している。

5　結　　論

本論文では，早期割引料金とアップグレード，オーバーブックを考慮に入れたホテル予約受付問題について考察した。構築したモデルでは，客室の需要として任意の形状の連続分布を設定することが可能である。数理的な解析の結果，総利益がオーバーブック数や早期割引用客室数に関して単調に非減少，あるいは非増加する範囲を示し，最適な数量の上界・下界を導出した。最適値の下界はその値までなら確実に利益を上げることができる値，上界はそれ以上増やすと利益が確実に下がる値を表すため，実用上で有効な指標として用いることが

できよう。

今後の課題として，ツインのオーバーブックの導入，キャンセル率の確率変数化，同時分布を持つ需要分布の適用などのモデルの拡張が挙げられる。また数値実験を行い，期待総利益の形状を視覚的に確認したい。その際，現実のホテルにおける需要データを用いて分析を実施したい。

参考文献

[1] R. D. Bandinelli, "An optimal, dynamic policy for hotel yield management," *European Journal of Operational Research*, **121** (2000), 476-503.

[2] M. J. Beckmann and F. Bobkowski, "Airline demand: an analysis of some frequency distributions," *Naval Research Logistics Quarterly*, **5** (1958), 43-51.

[3] G. R. Bitran and S. V. Mondschein, "An application of yield management to the hotel industry considering multiple day stays," *Operations Research*, **43** (1995), 427-443.

[4] G. R. Bitran and S. M. Gilbert, "Managing hotel reservations with uncertain arrivals," *Operations Research*, **44** (1996), 35-490.

[5] S. L. Brumelle, J. I. McGill, T. H. Oum, K. Sawaki and M. W. Tretheway, "Allocations of airline seats between stochastically dependent demands," *Transportation Science*, **24** (1990), 183-192.

[6] S. L. Brumelle and J. I. McGill, "Airline seat allocation with multiple nested fare classes," *Operations Research*, **41** (1993), 127-137.

[7] R. G. Cross, *Revenue Management*, Broadway Books, New York, 1998: 儲からない時代に利益を生み出すRM（収益管理）のすべて，水島温夫訳，日本実業出版社，1998年。

[8] R. E. Curry, R. E., "Optimal airline seat allocation with fare classes nested by origins and destinations," *Transportation Science*, **24** (1990), 193-204.

[9] 土井久太郎，ここが変だよ日本のホテル ～土井教授のホテル業界改造計画～，オータパブリケイションズ，2002年。

[10] A. Ingold, U. McMahon-Beattie and I. Yeoman, Yield Management: Strategies for the Service Industries, continuum, London, 2001 (2nd Edition).

[11] 井上博文，ホテル情報システム，明現社 1985年。

[12] 石原 直，ホテル・旅館の情報システム，中央経済社 1997年。

[13] S. E. Kimes, "The Basic of Yield Management," *The Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly*, **30** (1989), 14-19.

[14] T. Koide and H. Ishii, "The Hotel Yield Management with Two Types of

Room Prices, Overbooking and Cancellations," *International Journal of Production Economics*, accepted.

[15] V. Liberman and U. Yechiali, "On the hotel overbooking problem: an inventory system with stochastic cancellations," *Management Science*, **24** (1978), 1117-1126.

[16] J. I. McGill and G. J. van Ryzin, "Revenue management: research overview and prospects," *Transportation Science*, 33 (1999), 233-256.

[17] J. Popovic and D. Teodorovic, "An adaptive method for generating demand inputs to airline seat inventory control models," *Transportation Research B*, **31** (1997), 159-175.

[18] L. W. Robinson, "Optimal and approximate control policies for airline booking with sequential nomonotonic fare classes," *Operations Research*, **43** (1995), 252-263.

[19] M. Rothstein, "Hotel overbooking as a Markovian sequential decision process," *Decision Science*, 5 (1975), 389-404.

[20] J. Subramanian, S. Stidham and C. J. Lautenbacher, "Airline yield management with overbooking, cancellations and no-shows," *Transportation Science*, **33** (1999), 147-167.

[21] P. S. You, "A dynamic model for a two-cabin yield management with free upgrading decision," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44** (2001), 313-325.