ファジィネットワーク上の確率的スパニングツリー問題について

石　井　博　昭

1　は　じ　め　に

この論文は神戸学院大学における今年度（2003年度）の塩出省吾教授を代表とするプロジェクトに参加した研究成果をもとにしている。ネットワーク構造は社会科学，特に経営上のさまざまな関係を表現することができる。従ってネットワーク上の最適化問題は経営上の計画を解決する手法としてよく用いられる。しかし，社会科学上の関係はあいまい性や柔軟性をもつため，ファジィネットワークで表す方が適切な場合も多く見られる。すでに最短経路問題等の研究([1])も行っているが，今回はスパニングツリー問題について確率要素も加味した新しいモデルについて考察する。

2　ファジィネットワークとは

ファジィネットワークとはファジィグラフ $G=(V, E; \mu)$ ($V=\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n\}$ は点集合，$E=\{e_k=(\nu_i, \nu_j) \mid k=1, 2, \cdots, m\}$ は点と点を結ぶ枝の集合，は各枝の存在可能性を与える関数）の点や枝に数値が付随したものをいう。

通信網の設計では V は通信基地の集合，E は通信可能な回線建設候補の集合となる。また，$\mu: E \to [0, 1]$ は各通信回線を選択するときの望ましさを意味し，各通信回線には建設費用が付随しているとする。このとき，各基地間に通信可

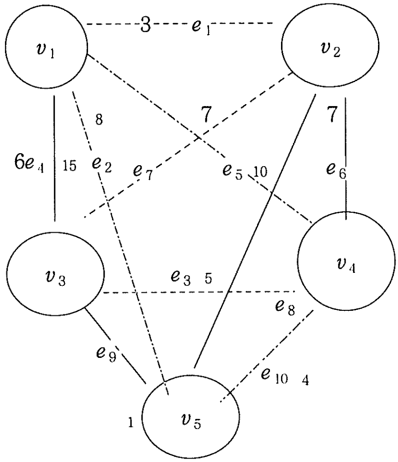

図1

能で建設費用がなるべく少なく，できるだけ望ましさが高いような回線建設パターンを選択するにはどの枝を選んだらよいかという問題が関連した現実問題となる。

通常のグラフ G は各枝の存在可能性が1であるファジィグラフである。以下に通常グラフに関する必要な定義を与える。次の等価な3つの条件の1つを満足するときツリーという。

定義1

(I) 閉路を持たない連結グラフである。

(II) 枝の個数が点の個数より1本少ない連結グラフである。

(III) どの2点も唯1つの単純パスによって結ばれているグラフである。

ここで単純パスとは図1のグラフであれば，破線で示した v_1 から v_4 への e_1，e_2，e_3 を通る行き方などの様にどの点，どの枝も高々1回通って，ある点からある点へ行く道のことである。閉路とは図1の一点鎖線の枝が示す様に最初と最後の点が同じである事を除いて基本パスである道のことである。グラフ G でど

の2点間にも基本パスが存在するとき，連結であるという。図1は連結グラフである。

定義2　連結グラフ G に対するスパンニングツリー（以下 ST と略す）とはツリーとなる G の部分グラフである。ここで部分グラフとは点集合は G と一緒で枝集合が E の部分集合であるグラフをいう。

$G=(V, E)$ を点の個数 n，枝の個数 m の連結グラフとし，各枝 e_i にはコスト c_i が付随している。例えば図1の各枝 $e_1, e_2, \cdots, e_{10}$ に対してその枝の傍の数値がコストである。

最小スパニングツリー問題はスパニングツリーの中でそれに属する枝のコストの和が最小となるようなものを求める問題である。以後，最小スパニングツリー問題を SP，対応する最小スパニングツリーを SST と略す。SP はいろいろなアルゴリズムで効率的に解けるがここでは Kruskal ([2]) のアルゴリズムを紹介する。

［Kruskal のアルゴリズム］

ステップ1：G の枝をコストの小さいほうから並べたリスト L を作る。また $T=(V, \phi)$ としてステップ2へ行け。

ステップ2：リスト L に残っている最初の枝から調べて，T に付け加えて閉路を作らないなら T に付け加えて，L から除く。そうでなければ，L から単純に除く。この操作を繰り返して，$(n-1)$ 個の枝が T に付け加えられるまで続ける。この時点での T を SST としてストップ。

図1のグラフに Kruskal のアルゴリズムを適用すると e_9, e_1, e_{10}, e_4 の順に枝が選ばれ，これが最小スパニングツリーを構成する枝集合となる。各点が基地で枝がこれらを結ぶ通信回線であるとすると最小スパニングツリーは最小のコストで各基地間を結ぶ回線網となる。通常このような回線網を建設する際にはそのコストは計画段階では確定していなくて確率変動あるいは曖昧性を持っている。ここでは，まずコストが確率的に変動する場合を考える。このとき，

できるだけ予算内に建設コストが納まるように回線網であるスパンニングツリーを構成する以下のような問題 SSP を考える必要が出てくる。

SSP: $f \to$ 最小

条件　$\Pr\left(\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \leq f\right) \geq \alpha$,　$x_j = 0 \text{ or } 1,\ j = 1, \ldots, m$

$\mathbf{x} = (x_j)$; スパニングツリー

ここで“条件 $\mathbf{x} = (x_j)$; スパニングツリー”は $x_j = 1$ は e_j がスパニングツリーの枝として選ばれている事を示し，$x_j = 0$ は選ばれていない事をするとして，選ばれた枝と点集合がスパニングツリーとなるという条件を示している。確率条件 $\Pr\left(\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \leq f\right) \geq \alpha$ はスパニングツリーとして選んだ枝のコストの和 $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ が予算 f を超えない確率が α 以上としなければならないという条件で，これは機会制約条件とよばれる。今コスト c_j が各々独立に正規分布 $N(m_j, \sigma_j^2)$ に従う確率変数とするとき，正規分布の再生性より $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ は正規分布 $N\left(\sum_{j=1}^{m} m_j x_j, \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2\right)$ に従う確率変数となる。従って $\dfrac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j - \sum_{j=1}^{m} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので K_α を標準正規分布での分布関数を $F(\cdot)$ として $K_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ となる値を示しているとすると

$$\Pr\left(\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \leq f\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \Pr\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j - \sum_{j=1}^{m} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2}} \leq \frac{f - \sum_{j=1}^{m} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2}}\right)$$

$$\geq \alpha \Leftrightarrow \frac{f - \sum_{j=1}^{m} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2}} \geq K_\alpha$$

となる。機会制約条件では成り立つ確率 α は最低50%以上であるべきであるので $K_\alpha \geq 0$ と仮定できる。$x_j = 0$ or 1 であるので，$x_j^2 = x_j$ となり，結局上記機会制約条件は以下のような決定論的等価条件 $f \geq \sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j}$ となる。

従って SSP は以下の問題 $SSPD$ と等価である。

$$SSPD\colon \sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j} \to 最小$$

　　条件　$x_j = 0$ or 1，$j=1, \cdots, n$　$\mathbf{x} = (x_j)$; スパニングツリー

SSPD は以下のような部分問題 *SSPD*(*R*) を用いて解く事ができることを示そう。

$$SSPD(R)\colon R\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j \to 最小$$

　　条件　$x_j = 0$ or 1，$j=1, \cdots, n$　$\mathbf{x} = (x_j)$; スパニングツリー

SSPD の最適解を x^*，*SSPD*(*R*) の最適解を $x^*(R)$ とするとき次の関係が成り立つ（証明は［3, 4］を見よ)。

定理１　$D^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^*}$ とおくとき $\mathbf{x}^*(2D^*)$ は *SSPD* の最適解 $\mathbf{x}^*$ となる。

SSPD(*R*) は枝のコストが $Rm_j + K_\alpha \sigma_j^2$ であるときの最小スパニングツリーを求める問題である。定理１より，すべての R について最小スパニングツリーを求めて，その中で $\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j}$ を最小にするスパニングツリーが元の問題 *SSPD* の最適解となる。幸いにも，R が変わっても最小スパニングツリーは Kruskal のアルゴリズムからわかるように枝のコストの順番が変わらない範囲では同じであるので，R を以下のように有限個の部分区間に分けて求めた各部分区間での最適解をチェックすればよい。

このためにまず各 $i \neq j$ について $Rm_i + K_\alpha \sigma_j^2 = Rm_h + K_\alpha \sigma_j^2$ となる $R = K_\alpha \dfrac{\sigma_j^2 - \sigma_i^2}{\mu_i - \mu_j}$ ($=R_{ij}$ とおく）を求める。次に $2\sqrt{m_D} \leq R_{ij} \leq 2\sqrt{M_D}$ なる R_{ij} をソートする。（ここで，m_D は枝のコストが $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_m^2$ のときの最小スパニングツリーのコスト和，M_D は同最大スパニングツリーのときのコスト和である。最大スパニングツリーは Kruskal のアルゴリズムにおいて大きい順に枝を選んでいけばよいので本質的に同じように構成できる。）その結果を $R_0 \underline{\underline{\Delta}} 2\sqrt{m_D} < R_1 < R_2 < \cdots < R_l < R_{l+1} \underline{\underline{\Delta}} 2\sqrt{M_D}$ (l は上記範囲での相異なる R_{ij} の個数）とする。次に部分区間 $[R_k, R_{k+1}]$，$k = 0, 1, \cdots, l$ を構築する。各部分区間の中点 $R = (R_k + R_{k+1})/2$ で

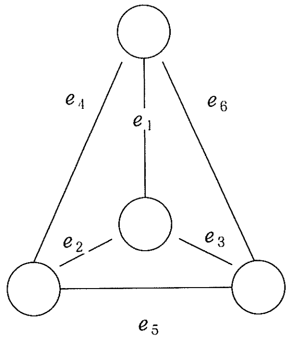

図２　確率的スパニングツリー問題の例のネットワーク

の $SSPD(R)$ の最適スパニングツリー $\mathbf{x}^{(k)}=(x_j^{(k)})$ を求め，その中で $\sum_{j=1}^{m} m_j x_j^{(k)} + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^{(k)}}$ を最小にするものを $SSPD$ の最適解とする。

次の例でこの辺りを説明する。

例１

図２で与えられるグラフを考える。ここで各枝のコストは以下の正規分布に従って独立に変動するとする。

$c_1 \sim N(16,0.6)$，$c_2 \sim N(49/3,0.1)$，$c_3 \sim N(14,1.0)$，$c_4 \sim N(44/3,0.7)$，$c_5 \sim N(15,0.2)$，$c_6 \sim N(43/3,0.2)$，また $\alpha=0.8413$ とする。このとき $K_\alpha=1.0$ である。

部分問題での各枝のコストは

e_1: $16R+0.6$，e_2: $49R/3+0.1$，e_3: $14R+1.0$，e_4: $4R/3+0.7$，e_5: $15R+0.2$，e_6: $43R/3+0.2$ また，$R_{12}=1.5$，$R_{13}=0.2$，$R_{14}=0.3/4$，$R_{15}=-0.4$，$R_{16}=1.2/5$ $R_{23}=2.7/7$，$R_{24}=1.8/5$，$R_{25}=0.3/4$，$R_{34}=0.9/2$

$R_{35}=0.8$，$R_{36}=2.4$，$R_{45}=1.5$，$R_{46}=-1.5/2$，$R_{56}=0$ であり，m_D, M_D は各枝のコストを分散の値，すなわち，c_1: 0.6，c_2: 0.1，c_3: 1.0，c_4: 0.7，c_5: 0.2，c_6: 0.2

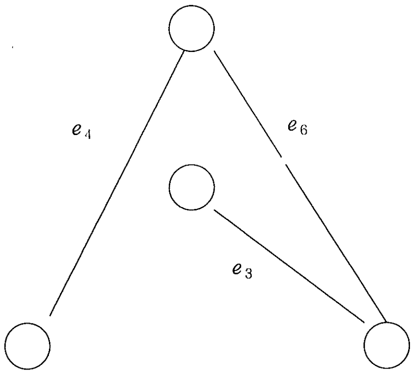

図３　例１の最適スパニングツリー

として各々最小スパニング・ツリー，最大スパニングツリーを求めればよい。このとき，e_2，e_5，e_6 が最小スパニングツリーを構成する枝であり，e_3，e_4，e_5 が最大スパニングツリーを構成する枝となる。従って，$m_D=0.1+0.2+0.2=0.5\rightarrow 2\sqrt{m_D}=1.414$，$M_D=1+0.7+0.6=2.3\rightarrow 2\sqrt{M_D}=3.033$ となるので，この間にある R_{ij} をソートしてその結果は $R_0=1.414<R_1(=R_{12}=R_{45})=1.5<R_2(=R_{36})=2.4$，$l=2$ となる。部分区間としては [1.414, 1.5]，[1.5, 2.4]，[2.4, 3.033] を考える。最初の区間の中点では枝のコストは小さい方から e_6，e_3，e_5，e_4，e_2，e_1 となるのでこの区間での最小スパニングツリーは枝 e_3，e_5，e_6 から構成され，そのときのもとの問題でのコストの総和は $43\frac{1}{3}+1.0\sqrt{1.4}=44.48$ となる。一方 2 番目の区間の中点での枝のコストは小さい方から，e_6，e_3，e_4，e_5，e_2，e_1 となるので，最小スパニングツリーの枝は e_3，e_4，e_6 となる。もとの問題でのコスト和は $43+1.0\sqrt{1.9}=44.378$ となるので，最適解は e_3，e_4，e_6 で構成されるスパニングツリーとなる。最後に三番目の区間の中点ではコストの順番が e_3，e_6，e_4，e_5，e_2，e_1 となるが，最適解はやはり e_3，e_4，e_6 で構成されるスパニングツリーとなるので，もとの問題の最適解はこれらを比較して e_3，e_4，e_6 で構成されるスパニングツリーとなる。このスパニングツリーを図 3 に示す。

3　ファジィネットワーク上の確率的スパニングツリー問題

2での確率的スパニングツリー問題は通常のグラフ上で考えていたが，通信網設計では単にコストばかりではなく，その回線の重要度などの枝特有の数値が対応し，それが枝を選ぶ望ましさになってくると考えられる。このことを枝の存在（感）の程度としてできるだけ望ましい枝から通信網を作ることが課題となる。すなわち，*SSP*を2目的とした以下の問題*SSFP*を考えよう。ここでμ_iは枝 e_i, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$ の存在可能性である。

SSFP: $f\to$最小，$\min\{\mu_i|x_i=1\}$ →最大

条件　$\Pr\left(\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \leq f\right) \geq \alpha$,　$x_j=0$ or 1, $j=1,\ldots,m$

　$\mathbf{x}=(x_j)$; スパニングツリー

$\min\{\mu_i|x_i=1\}$→最大はスパニングツリーを構成している枝の存在可能性が最大となるようにとの意味である。*SSFP*は以下の等価確定問題*SSFPD*に前述の*SSP*から*SSPD*へと同様に変換される。*SSFP*, *SSFPD*も2目的問題である。従って，一般に同時に $\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j}$ を最小，$\min\{\mu_i|x_i=1\}$ を最大にするスパニングツリーは存在しない。従って以下で定義する非劣スパニングツリーを探す。

SSFPD: $\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j}$ →最小，$\min\{\mu_i|x_i=1\}$→最大

　条件 $x_j=0$ or 1, $j=1, \cdots\cdots, m$, $x=(x_j)$; スパニングツリー

SSFP, *SSFPD* ともに実行可能解はスパニングツリーであるので，通常のグラフGの全てのスパニングツリーの集合をFとすると，$x\in F$に対して次のように非劣性を定義する。

（優越性）$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in F$に対して以下の不等式が成り立つとき，$\mathbf{x}^1$が$\mathbf{x}^2$に優越すると定義する。

$$\sum_{j=1}^{m} m_j x_j^1 + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^1} \leq \sum_{j=1}^{m} m_j x_j^2 + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j^2},$$

$$\min\{\mu_i \mid x_i^1 = 1\} \geq \min\{\mu_i \mid x_i^2 = 1\}$$

かつ少なくとも一方の不等式は等式なしで成り立つ。

（非劣性）$\mathbf{x} \in F$ が非劣スパニングツリーであるとは F の中に $\mathbf{x}$ に優越するスパニングツリーが存在しないときをいう。

まず，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ をソートしてその結果を $\mu^1 > \mu^2 > \cdots > \mu^q > 0$ とする。ここで q は相異なる μ_i の個数である。つぎに枝集合 $E(k) = \{e_i \mid \mu_i \geq \mu^k\}, k = 1, 2, \ldots, q$ を定義してグラフ G から部分グラフ $G(k) = (V, E(k)), k = 1, 2, \cdots, q$ を定義する。すなわち，$G(k)$ は枝の存在可能性が μ^k 以上の枝からなるグラフである。また，一群の確率的スパニングツー問題 $SSP(k)$ および $SSPD(k)$ を各々 SSP, $SSPD$ のグラフとした問題として導入する。2での解法を用いて全ての $SSP(k)$ を解いてその最適スパニングツリーから非劣スパニングツリーを残せば $SSFP$ を解くことができる。そのためには $SSPD(R)$ を作る必要があるが，そのときの区間分けは全ての枝についてまず行っておけばよい。すなわち $R_0 \triangleq 2\sqrt{m_D} < R_1 < R_2 < \cdots < R_l < R_{l+1} \triangleq 2\sqrt{M_D}$ に従って部分区間 $[R_k, R_{k+1}]$，$k = 0, 1, \cdots, l$ を構築する。各部分区間の中点 $R = (R_k + R_{k+1})/2$ でやはり $SSPD(R)$ を対応する部分グラフに $G(k)$ ついて解けばよいが，実際には部分区間は $G(k)$ に対応する枝の区分点 R_{ij} だけ考えればよいので，その数は $O\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) = O(m^3)$ となる。1回最小スパニングツリー問題を解くのに $O(m)$ かかるので直接的な解法ではトータル $O(m^4)$ の計算手間が必要となる。

例２　例１のグラフの各枝に以下のように存在可能性を付加したグラフ（ファジィネットワーク）を考える。$\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.9$, $\mu_3 = 0.7$, $\mu_4 = 0.8$, $\mu_5 = 0.5$, $\mu_6 = 0.6$ であるとする。このとき，$\mu^1 = 1.0 > \mu^2 = 0.9 > \mu^3 = 0.8 > \mu^4 = 0.7 > \mu^5 = 0.6 > \mu^6 = 0.5$ となる。$q = 6$, $G(6) = G$, 例１から図３のスパニングツリーが最適となる。従ってこのときの最小の存在可能性は $\mu_6 = 0.6$ となり，このときの

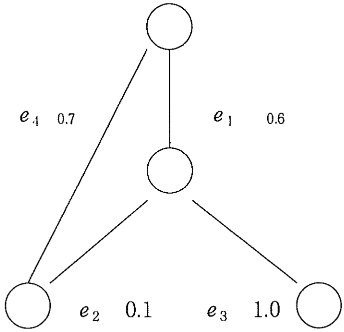

図4　$G(4)$ でコストを分散にとったグラフ

最適値 $\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 x_j} = 44.378$ となる。従って次は $G(4)$ をチェックする。枝としては e_1, e_2, e_3, e_4 を考えるので，m_D, M_D を求めるためのネットワークは図 4 のようになる。

m_D は e_1, e_2, e_3 から $0.1+0.6+1.0=1.7$ となるので，$2\sqrt{m_D}=2\sqrt{1.7}=2.608$, 一方 m_D は e_1, e_3, e_4 から $M_D=0.6+1.0+0.7=2.3$ となって，$2\sqrt{M_D}=3.033$ となる。このときの区間分割の方は $R_{12}=1.5$, $R_{13}=0.2$, $R_{14}=0.3/4$, $R_{23}=2.7/7$, $R_{24}=1.8/5$, $R_{34}=0.9/2$ とから，1つの区間 [2.608, 3.033] のみとなる。また，この区間での枝コストの順序は小さいほうから e_3, e_4, e_2, e_1 となるので最適なスパニングツリーは e_2, e_3, e_4 ら構成されその値は $44+\sqrt{1.8}=45.342$ となる。また最小の存在可能性は $\mu_3=0.7$ であるので，次は $G(3)$ をチェックするが，以下の図 5 のように連結でないのでこれ以上考える必要がない。これで $SSFPD$ の非劣スパニングツリーは図 6 (a), (b)の 2 つとなる。

4　おわりに

不確定要素と不確実要素の両方が存在する離散最適化問題としてファジィネットワーク上の確率的スパニングツリー問題を考察した。しかしその非劣スパニングツリーを求める解法は構造をうまく利用していないので，その洗練化

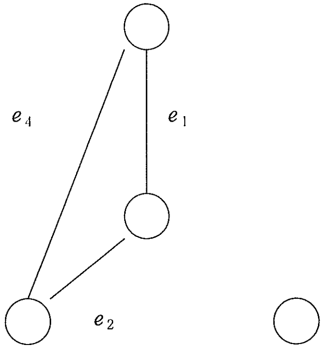

図5　$G(3)$

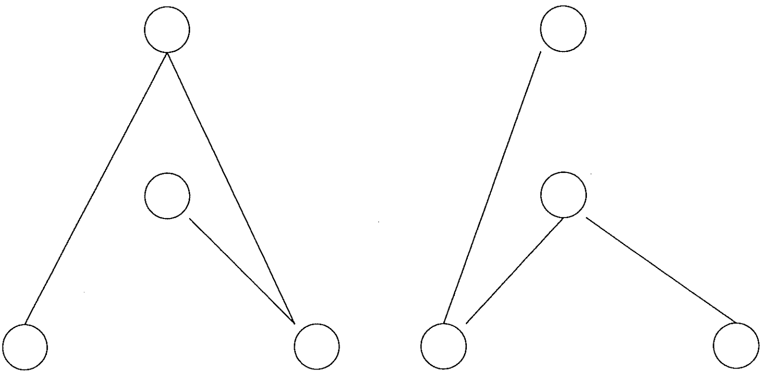

図6　非劣スパニングツリー

(a) 存在可能性の最小値0.6
$f=44.378$

(b) 存在可能性の最小値0.7
$f=45.342$

が必要である。一方でファジィネットワーク上の組合せ最適化は未だ始まったばかりであるので，別の確率的スパニングツリー問題も含めて，さらなる研究を行っていきたい。最後になりましたが，このような成果発表の機会を与えてくださった塩出省吾教授，この辺りの研究を一緒に行ってきた広島国際大学島田文彦博士に感謝したい。

参 考 文 献

[1] 島田文彦，石井博昭，伊藤健「ファジィネットワーク上の最短経路問題」日本ファジィ学会誌10巻2号 (1998) 348-355.
[2] J. B. Kruskal, "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and Traveling Salesman Problem," Proceedings of ACM 7 (1956) 45-50.
[3] Hiroaki Ishii, S. Shiode, T. Nishida and Y. Namasuya, "Stochastic Spanning Tree Problem," Discrete Applied Mathematics 3 (1981) 263-273.
[4] Hiroaki Ishii, S. Shiode and T. Nishida, "Chance Constrained Spanning Tree Problem," Journal of the Operations Research Society of Japan 24 (1981) 147-157.