LPを応用した総合順序付け方法の最適条件について

野　口　博　司

1．は　じ　め　に

多くの人が，複数の対象の中から，好み等の順に順序づけを行う場合に，対象の特性に一長一短がある時や対象の数が多い時には，その順序づけは困難となる。そこで，複数の対象を，学業成績のような，A，B，…等の小数のランクを定めて，そのランクに従って，対象を凡そ評価した投票結果のデータから順序づけることが考えられる。その場合に，最も妥当な複数の対象の総合順序付けを行うためには，そのランクに各々重みを定め，それぞれのランクの得票数との積和合計の大きさによって対象の総合順序を決める方法が一般的である。このような方法は1781年に政策の意見の同意を得る方法として「評点法」として提示されたのが最初である（Borda [1]）。マーケティングにおける商品の選好評価や，社会における幾つかの政策案に優先順序をつける評価において，これらの投票による方法が最も簡単であり，現在でもよく用いられている。しかしながら，各々のランクにつけた重みが適切であるかどうかを判定する方法がなく，予め定めた重みの評点に従って，一律に対象の総合評点を求めて順序を決めている。1996年に Green, Doyle と Cook らは，LP (Linear Programming) を応用して，それぞれの対象が一番優位になるようにランクの重みを定め，相対的に全対象の総合順序を決める方法を提案した（Cook & Kress (1990) [2]，Green, Doyle & Cook (1996) [3]）。以下この方法を Green らの方法と呼ぶ。その中で，彼らは，対象が優位となるための重みの付け方として二つの制約条

件を示した。一つは上位のランクと次のランクとの重み差が０以上であり，一番低いランクの重みが０以上とする条件である。もう一つは，異なるランクの重みが同等になるのを認めなく，また一番低いランクも必ず幾らかの重みを有するという条件である。本報告は，Green らの示したこれらの条件が，現実の適用に適切なものかを検討し，Green ら示した条件には問題があることを指摘し，新たに，現実の適用に最適な制約条件を提案する。

２．ＬＰ を応用した総合順序付け方法

2.1　総合順序付け法の概要について

99年度の日本プロ野球セントラル・リーグでの MVP（Most Valuable Player）の選出は，近年一番の接戦であったと思われる。第１表は，実際行われたスポーツ記者による投票結果の表（99年10月31日の読売新聞より抜粋）である。投票権を持つ記者は，もっとも評価の高いランク一位から三位までを連記し，一位のランクの重みに５点，二位３点，三位１点を割り当て投票数との積和合計の得点にてＭＶＰを選出する。一位ランクの票は野口の59票に対して上原が80票，しかし，二位，三位票では野口が上回り，結局14点の差で上原を上回り，野口がＭＶＰに選ばれた。もしこのとき一位の重みに６点が割り当てられ，他は上記と同じなら，上原が野口よりも７点上回り上原がＭＶＰに選ばれていた。ここで，各一位から三位までのランクの重みに何点を配すれば適切かという問題が生じる。候補者は出来るだけ自分の得票結果に優位な重み点をランクに配分してほしいだろう。ＬＰを応用して，候補者の総合順序付けを行うことは，このような場面への適用に関する問題である。従って，後で詳細に

第１表　セントラル・リーグ最優秀選手得票内容（上位３選手）

ＭＶＰ候補選手名	一位（５点）	二位（３点）	三位（１点）	合計得点
①野口（中日）	59票	72票	41票	552
②上原（巨人）	80票	35票	33票	538
③関川（中日）	55票	62票	43票	504

記述する Green らの方法はユニークで優れている。しかしながら，各ランクの重み配点においては，適用場面に適切であるように配慮されるべきである。

2.2　LPを応用した数理モデルについて

LPを応用した Green, Doyle & Cook (1996 [3]) らの順序付け方法を整理して示す。いま，M 個の対象に対して n 人の者が K 番目まで好きなもの（ランクが K 個ある）を順に選んだ時，その対象物 m が得た好きな順位別（ランク別）の得票数とそのランクの重み w_{mk} との積和ができるだけ大きな値となるように，対象 m にとって好都合な重み w_{mk} を定める。このとき対象 m の選好率 θ_{mm} が(1)式のようになると考える（Cook & Kress (1990) [2]）。

$$\theta_{mm} = Maximize \sum_{k=1}^{K} w_{mk} y_{mk} \tag{1}$$

ここで，$m=1, 2, \cdots, M$ であり，$k=1, 2, \cdots, K$ である。そして，$y_{m1}, y_{m2}, \cdots, y_{mK}$ は n 人の者が，M 個の対象に対してランク K 番目まで投票した結果の対象 m における投票数である。しかし w_{mk} に制約がなければ，無限に大きな重みを定めればよいので，このままでは対象間の総合順序は決めることができない。そこで，Green らは，w_{mk} の条件として，各対象の好都合条件下で各対象の選好率 θ_{mm} を求めるための制約条件として(2)，(3)，(4)式を設定した。

$$\theta_{mq} = \sum_{k=1}^{K} w_{mk} y_{qk} \leqq 1 \quad (q=1, 2, \cdots, M) \tag{2}$$

但し

$$w_{mk} - w_{mk+1} \geqq d(k, \varepsilon) = \varepsilon \geqq 0, \;\; w_{m1} \geqq w_{m2} \geqq \cdots \geqq w_{MK} \geqq \varepsilon \tag{3}$$

または

$$w_{mk} - w_{mk+1} \geqq d(k, \varepsilon) = \varepsilon > 0, \;\; w_{m1} > w_{m2} > \cdots > w_{MK} > \varepsilon \tag{4}$$

そして，(2)(3)式を組み合わせた条件からランクの重みを決める方法を彼らは「弱い順序付け法」と呼び，(2)(4)の組み合わせた条件からランクの重み決める方法を「強い順序付け法」と呼んだ。本報でも，前者を「弱い順序付け

の条件」，後者を「強い順序付けの条件」と呼ぶ。また，(３)(４)式の $d(k, \varepsilon)=\varepsilon$ は，k 番目のランクの重みと $k+1$ 番目のランクの重みとの差を表す。即ち，彼らは，ε の緩い条件として(３)式を考え，また，ε の強い条件として，(４)式の条件を考えた。これにて，各対象が各々の優位な立場を保持してランクの重み w_{mk} を定めることができるようにした。そして，M 個の対象の総合順序付けは各ランクの重み w_{mk} と投票数 y_{mk} との累積和によって導ける。そして，Green らは，求めた θ_{mq} の値を対象毎に導き，M 個の対象における $M\times M$ 行列の要素に各々の選好率を配し，その列和の算術平均により，M 個の対象の順序を総合的に決めた。一方，この方法において，制約条件の中から最大化したい自分の式，例えば自分としての対象を o とすると，対象 $o(o=1, 2, \cdots, M)$ の制約式を除いて選好率を導くこともできる。具体的には，(１)式の最大化問題において，(２)式の制約条件下から(５)式を除く。そして，対象 o の都合のよい選好率を求めることになる。この場合には，選好率 θ_{mm} は１より大きくなる場合もあるが，この方法でも M 個の対象の順序を総合的に決めることができる。この方法についても制約条件は同じように考えられる。

$$w_{o1}y_{o1}+w_{o2}y_{o2}+\cdots+w_{oK}y_{oK}\leqq 1 \tag{5}$$

ところで，Green らは，重み w_{mk} の現実問題での適切性については，あまり検討していなかった。また，ε の変化により，対象 m の総合順序結果がどのように変化するかも吟味していない。また，投票数の大小が線形計画問題における重みの解の可能領域に影響を与え，当然，ε の範囲は限られてくる。そこで，筆者は，この ε の変化に応じて，Green らの順序付け方法がどのような挙動をするかを調べて，その問題点を明らかにした。

2.3　Green らの条件の問題点について

Green らが用いた数値データの一部を流用して，「弱い順序付けの条件」の条件下で ε を変化させ，その結果，対象の総合順序がどのように変化するかを調べた。用いたデータは第２表である。ε の変化によりランクの重み値の違いを示し

第2表　A～Fの対象に対するランク別の得票数
(Green 等（1996［3］）から一部流用)

横に対象	A	B	C	D	E	F	計
一位得票	3	4	6	6	0	1	20
二位得票	3	5	2	2	4	4	20
三位得票	4	5	3	2	3	3	20

第3表　εの変化による各ランクの重み値の違い

(a)　$\varepsilon=0.000$

最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	A	B	C	D	E	F
A, C	0.125	0.050	0.050	0.725	1.000	1.000	0.950	0.350	0.475
B, E, F	0.071	0.071	0.071	0.714	1.000	0.786	0.714	0.500	0.571
D	0.136	0.091	0.000	0.682	1.000	1.000	1.000	0.364	0.500
総　合　順　序				4	1	2	3	6	5

(b)　$\varepsilon=0.010$

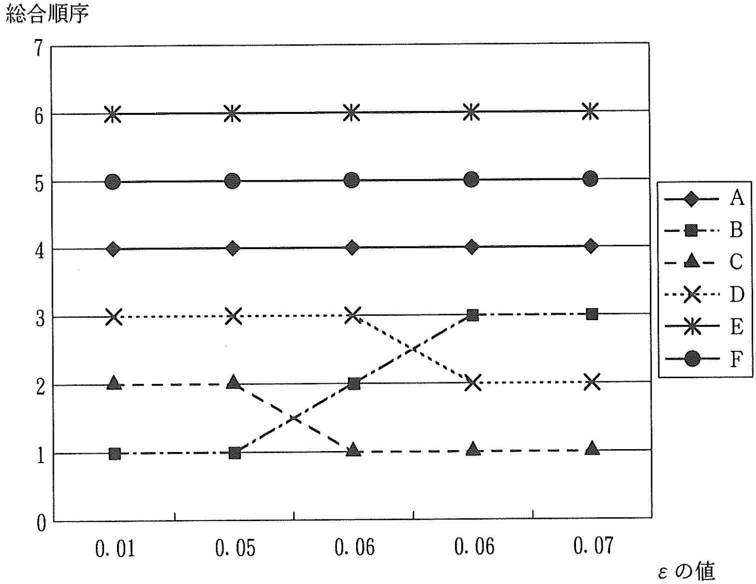
最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	A	B	C	D	E	F
A, C	0.126	0.055	0.045	0.720	1.000	1.000	0.956	0.352	0.478
B, E, F	0.082	0.072	0.062	0.711	1.000	0.824	0.761	0.475	0.577
D	0.136	0.091	0.000	0.682	1.000	1.000	1.000	0.364	0.500
総　合　順　序				4	1	2	3	6	5

(c)　$\varepsilon=0.070$

最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	A	B	C	D	E	F
A, C	0.142	0.072	0.000	0.648	0.935	1.000	0.996	0.293	0.435
B, E, F	0.142	0.072	0.000	0.648	0.935	1.000	0.996	0.293	0.435
D	0.143	0.071	0.000	0.642	0.927	1.000	1.000	0.284	0.427
総　合　順　序				4	3	1	2	6	5

たのが第３表である。

また，εの値の変化による各対象の総合順序の変化をグラフにしたのが，第４図である。



第４図　εの値による対象Ａ～Ｆの総合順序の変化

表３から Green の条件について考察する。(a)ε＝0.000 では，各々Ｂ，Ｅ，Ｆを優位にした場合には，各ランクの重みは同じとなり，ランクの区分を無視している。Ｄを優位にした場合には，順位（ランク）３の重みは０となり，ランク３の得票数はないことになる。「弱い順序付けの条件」では，現実の適用では，問題のあるランクの重み付けとなる。また，第４図からεの値により，どのように総合順序に変化が生じるか調べた結果，εの値が0.050から0.060に変化するところで，対象の総合順序に変化が生じた。そして，εが0.070以上の時は，解は存在しない，凡その解の存在領域をもつεを予想するには，各対象が得た得票総数のうちから最大のものを選んで，その逆数以下を考えればよいことは明らかである。今回最大得票数はＢの14票であり，ε＝1/14＝0.071 以下となる。

εの値が大きいことは，それだけランクの重みに制約を課すことであり，弱い条件ではなくなる。また，$\varepsilon=0.070$でも，やはりDを優位にした場合には，順位（ランク）3の重みは0となり，ランク3の得票数はなかったことになる。得られた得票が無駄にならないようにしなければならない。また，僅かでもランク区分を行うことが，適用において適切な条件である。従って，その条件は，$\varepsilon>0$，$w_{m1}>w_{m2}>\cdots>w_{mK}>\varepsilon$であり，前述の「強い順序付けの条件」となる。しかし，この場合もεの値を考慮しないと解が求まらない問題が残る。そこで，筆者は，解が常に求められ，上述の問題を解決した「新しい順序付けの条件」を提案する。

3．提案する新しい順序付けの最適条件について

まず，ランク一位と二位の重み差等を考慮することが必要である。即ち，$k=1\sim K$とした時に，

$$w_{m1}-w_{m2}>\cdots>w_{mk-1}-w_{mk}>w_{mk}-w_{mk+1}>\cdots$$
$$>w_{mK-1}-w_{mK}>0 \tag{6}$$

とするのが，ウエイト差を考えた最も妥当な条件である。そこで，$w_{mk}-w_{mk+1}<w_{mk}-\{(k-2)/(k-1)\}w_{mk+1}$となることから，ここで，次の(7)式を置く。

$$w_{mk-1}-w_{mk}\geqq w_{mk}-\{(K-2)/(K-1)\}w_{mk+1}>w_{mk}-w_{mk+1} \tag{7}$$

(7)式から，

$$w_{mk-1}\geqq 2w_{mk}-\{(K-2)/(K-1)\}w_{mk}(w_{mk}>w_{mk+1}) \tag{8}$$

$$w_{mk-1}\geqq\{k/(k-1)\}w_{mk} \tag{9}$$

$$\therefore (k-1)w_{mk-1}\geqq kw_{mk} \tag{10}$$

即ち，(10)式を具体的に表すと$w_{m1}\geqq 2w_{m2}\geqq 3w_{m3}\geqq\cdots\geqq Kw_{mK}$，$w_{mK}\geqq\varepsilon$となる。

次に，ランクの重みの桁は，得られた得票数の桁数により変るので，線形計画法の解の存在領域を考えたεの設定が必要となる。即ち，全ての人の投票が，ある対象に全て投じた時に，その最下位のランクのもつ重み値がεの最下限値と考えられる。即ち，投票数とランク比の和との積和の逆数がεの下限値とする

ことができる。

以上より，ＬＰを応用して総合順序付けるための新しい最適な制約条件は，

$$w_{m1} \geqq 2w_{m2} \geqq 3w_{m3} \geqq \cdots \geqq Kw_{mK},$$
$$w_{mK} \geqq \varepsilon = 1/\{(K+\cdots+2+1)\times n\} = 2/\{K(K+1)\times n\} \quad (11)$$

となる。

ここで，再び第１表のＭＶＰの選抜事例を用いて，今まで示した順序付け条件では，どのように結果が変化するかを示す。この際に，Green らは，総合順序付けにおいては算術平均を用いていたが，ＬＰを応用した選好率は比率の性質をもっているので，我々は，その点を考慮し，相乗平均を用いて総合順序付けを行った。

第４表　第１表における順序付け法による結果の違い

(a)　「弱い順序付けの条件」による結果

最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	野口	上原	関川
野口	0.00581	0.00581	0.00581	1.0000	0.8605	0.9302
上原	0.01250	0.00000	0.00000	0.7375	1.0000	0.6875
関川	0.00895	0.00418	0.00418	1.0000	1.0000	0.9308
総合順序				二位	一位	三位

(b)　「強い順序付けの条件」で $\varepsilon=0.0001$ とした時の結果

最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	野口	上原	関川
野口	0.00590	0.00580	0.00570	1.0000	0.8605	0.9302
上原	0.00897	0.00420	0.00410	1.0000	1.0000	0.9303
関川	0.00897	0.00420	0.00410	1.0000	1.0000	0.9303
総合順序				一位	二位	三位

(c)　「新しい最適条件」

最大の対象	w_{m1}	w_{m2}	w_{m3}	野口	上原	関川
野口	0.00920	0.00460	0.00307	1.0000	0.9985	0.9234
上原	0.00924	0.00458	0.00305	1.0000	1.0000	0.9234
関川	0.00924	0.00458	0.00305	1.0000	1.0000	0.9234
総合順序				一位	二位	三位

(a)「弱い順序付け条件」の結果では，やはり，得られた得票の情報を無視し，異なるランクの重みを同じにするという，不適切なランクの重みが導かれている。この条件下では，上原がＭＶＰに選ばれる。(b)「強い順序付け条件」においては，$\varepsilon=0.0001$ と ε の下限値以下を守ったので，線形計画法の解の可能領域内に入り，解が導けた。$\varepsilon=0.1$ などの大きな値にすると解は導けない。今回の場合は，各対象は，最小限適用上の適切さを残し，なお且つ自分が有利となる重みを自由に定めており問題はない。この条件下では，野口がＭＶＰとなる。(c)また今回提案した「新しい最適条件」では，許されるランク比の範囲内で，各ランクの重みが定まり，全く適用上の問題はない。最適条件下では，野口がＭＶＰに選ばれる。「新しい最適条件」では野口と上原が極めて僅少差となる。これは，第１表の各選手の得票結果から見ても妥当である。従って，今回提案する「新しい最適条件」は，Green らの示した順序付け条件よりも適用上最適な順序付け条件といえる。

４．お　わ　り　に

Green らが提案したＬＰを応用して，各対象が得たランク別投票結果から，各々の対象がもっとも優位になるランク別の重みを定めて，相対的に全対象の総合順序を決める方法について，適用上の適切さの観点からその挙動を調べた。その結果，彼らが提案した二つの条件のうち，「弱い順序付けの条件」は，ランクが異なるのにその区別がなくなる。そして，あるランクの投票データを捨てるといった適用上での問題が起こりうることを示した。彼らの「強い順序付けの条件」においても，ランクの重み差である ε の値により，解が導けないことが起こる。また，ランク区分を弱くすると「弱い順序付け条件」に極めて近くなることを示した。そこで，筆者は，これらランクの重み付け条件について整理し，適用上の問題を解消したランク区分が明確である新たな最適な条件を提案した。即ち，その最適な条件とは，$w_{m1} \geqq 2w_{m2} \geqq 3w_{m3} \geqq \cdots \geqq Kw_{mK}$, $w_{mK} \geqq \varepsilon = 1/\{(K+\cdots+2+1)\times n\} = 2/\{K(K+1)\times n\}$ である。これらの方法を多目的にまで拡張

して用いることができることは既に報告している〔5〕。今後，今回報告した新しい最適な条件下によるＬＰを用いた順序付け方法は，政策案や事業計画案，それにスポーツ等の競技において，選抜の順序づけにおいて，広く活用でき，他のいろいろな場面での有効な適用が期待できるものと考える。

参 考 文 献

[1] Borda, J. C., Memoire sur le Elections au Scrutin, Histoire del'Acad, Royale Scientifique, Paris, (1781).

[2] Cook, W. D., & Kress, M., *"A data envelopment model for aggregating preference ranking"*, Management Science, 36, (1990) 1302-1310.

[3] Green, R. H., Doyle, J. R., & Cook, W. D., *"Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation"*, European Journal of Operation Research, 90, (1996) 461-472.

[4] Noguchi, H., & Ishii, H., *"The Application of Rank Ordinal Data Using DEA model to Conjoint Analysis"*, Math. Japonica 51, No.1 (2000), 21-34.

[5] 野口博司，石井博昭，「多目的に評価されたランク別投票結果からＤＥＡを用いて適切な総合順序付けを行う方法」，流通科学大学論集－経済・経営情報編，第９巻，第２号 (2000)，P. 21～34.