競合する3施設の配置問題
——需要が一様に分布している場合——

塩　出　省　吾

アブストラクト

本論文では，互いに競合関係にある3施設の配置問題を考える。3施設の配置に関しては順序があり，最初の施設が配置されている状態から，新たに配置する2番目の施設の配置問題（セントロイド問題）および3番目の施設の配置問題（メディアノイド問題）を考える。これらの問題は Hakimi [2] の研究以降いくつか研究されており（[3-6, 8, 10]），一般的に難しい問題であるがナッシュ均衡のモデルとは異なり，解は必ず存在することが保障される。しかし，解の存在が保障されても，需要が一般の分布をしている場合は解を求めることは非常に難しく，本論文では，特に需要が一様分布する場合について詳細に解析し，比較的容易に解が得られるメディアノイド問題の最適解を用いたセントロイド問題の解法を議論する。

1. はじめに

Hotelling [1] の研究から始まり，競合配置に関する研究は数多く存在するが，新たに市場に参入する競合施設の配置問題を考えるときに，既に配置されている競合関係にある施設を考慮した研究は少ない。これは，新たに参入する施設間の関係を解析するだけでも難しいので，既存の施設のことを考えると多段階の決定問題となり，さらに解析を困難にし，ほとんどまともな解析結果が得られないことに起因すると思われる。しかし，現実問題として考えると，何も既存の施設がない全く新しい地域に競合する施設が参入してくることはあまりないようにも思われる。

そこで本研究では，既に1つの施設が市場に存在し，その市場全体の需要を

独占している場合を考え，その市場に新たに2つの施設が参入する場合を考える。これら3つの施設は互いに競合しており非協力であると仮定する。また，新たに参入する2施設の配置は同時でなく配置に順序があるとする。最初に配置する施設の問題は後から配置する施設のことを考えなければ Hakimi [2] によって導入されたメディアノイド問題として考えれば良いのであるが，後から配置される施設のことを考えなければならないので，セントロイド問題になるのである。後から配置する施設は既に配置されている2つの施設の位置を見て，自分が有利になるように配置すれば良いのでメディアノイド問題として考えれば良い。

本論文では，次のセクション2でこのモデルについて定式化し，その一般的な性質を解析する。ここで需要は連続型分布を考えたが，一般的な連続型分布では解析的に解くことは困難で，セクション3で需要が一様分布をしている場合についてさらに詳細に解析し，メディアノイド問題とセントロイド問題の最適解を導く。

2. モデルの定式化と解析

本論文では直線市場を考える。この市場に施設Aが a の位置に施設を既に配置しており，現在この市場全体を独占しているとする。いまこの市場に，施設Aとは競合する，しかも互いにおいても競合している2施設B，Cが新たに参入する場合を考える。複数の施設が存在することになるので，施設の利用者は自分に近い施設を利用し，距離が等しい施設に対しては均等に利用すると仮定する。2つの施設B，Cはこの順に参入し，先に市場に参入する施設Bは，既に配置されている施設Aと後から配置される施設Cを考えて配置しなければならない。この施設配置問題はセントロイド問題（シュタッケルベルグ均衡問題）であり，後から配置されるCの施設の位置により最適な位置が左右される。すなわち，後から配置されるCは，そのとき既に配置されている施設A，Bの位置を認識した上で獲得する需要量が最大になるように施設を配置するというメ

ディアノイド問題を考えることになる。施設Ｂの配置問題に戻ると，後から配置される施設Ｃがメディアノイド問題に関して最適に配置するということを考えて施設を配置するということになるのである。

メディアノイド問題を考える。配置の順番としては後になるが，セントロイド問題を考えるときには必ずメディアノイド問題の解が必要になる。直線市場において需要量が位置 x に対して連続的に分布していると仮定し，その分布している需要量の関数を $f(x)$ とする。さらに，次の積分 $F(x)$ も定義する。

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

このとき，$F(x)$ は位置 x より左にある（座標が小さい）部分の領域の需要量を表すことがわかる。そこで，新しく参入する施設Ｂ，Ｃの位置をそれぞれ b, c とすると，施設Ｃの最適配置については，施設Ａ，Ｂの位置関係の大小で異なる。

(1)　$a<b$ の場合

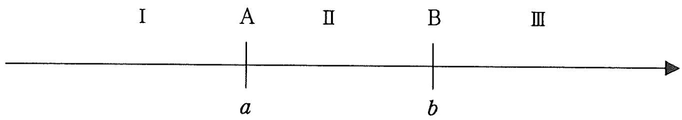

図１　$a<b$ の場合

この場合はＣの配置としては図１のような３つの区間Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの各場合で考えれば良いことがわかる。結局，Ｃの配置としては次の５通りが考えられる。

①　区間Ⅰに配置する場合

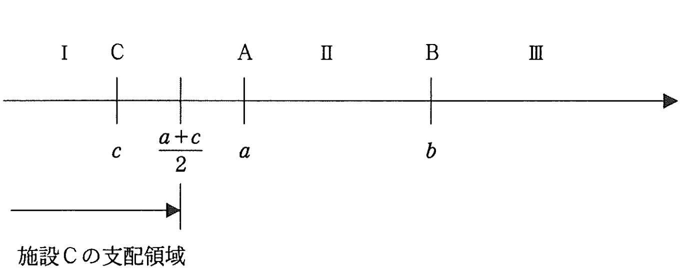

図２－１　区間Ⅰに配置する場合

この場合は図２のように施設Ｃの支配領域は表され，その獲得する需要量は $F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ になる。

② 区間IIに配置する場合

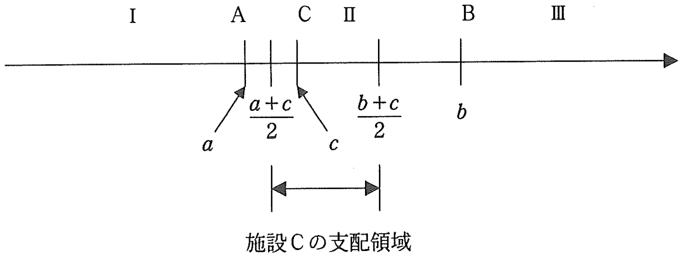

図２-２　区間IIに配置する場合

この場合は施設Ｃの支配領域は対しては図２－２のようになり，施設Ｃの獲得する需要量は $F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ である。

③ 区間IIIに配置する場合

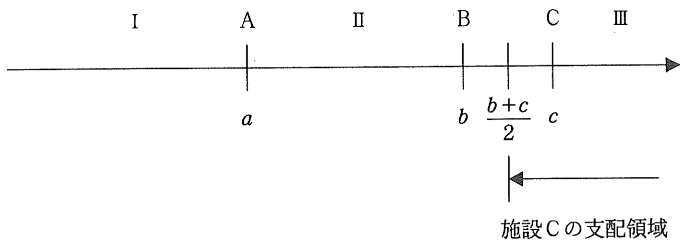

図２-３　区間IIIに配置する場合

この場合も施設Ｃの支配領域は図２－３のようになり，その獲得する需要量は $D-F\left(\frac{b+c}{2}\right)$ である。（ここで D は全需要量である。）

④ 施設Ａと同じ位置に配置する場合

この場合は施設Ｃの支配する領域は図２－４のようになるが，共通支配領域なので獲得する需要量を折半して $\dfrac{F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}$ となる。

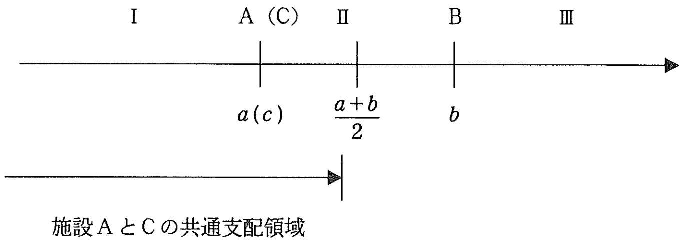

図2-4　施設Aと同じ位置に配置する場合

⑤　施設Bと同じ位置に配置する場合

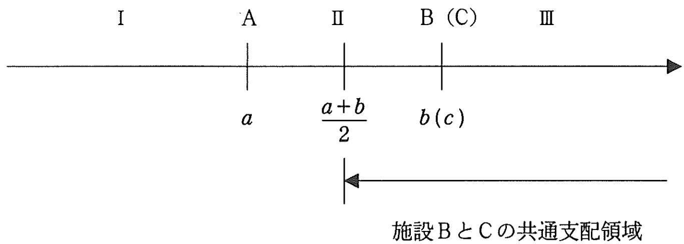

図2-5　施設Bと同じ位置に配置する場合

この場合も施設Cの支配する領域は図２－５のようになるが，上と同様にこの領域は共通支配領域なので獲得する需要量は折半して $\frac{D-F\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}$ である。

これら５つの場合を考えるのであるが，施設Cは自らの獲得する需要量を最大にするように行動するのであるから，①の領域Ｉに配置する場合においては施設Cの配置はできるだけAに接近した方が多くの需要量を獲得できるので施設Aの左側に隣接して（くっついて）配置することになる。このとき獲得する需要量は $F(a)$ であることがわかる。これが領域Ｉにおける最大獲得需要量である。③の領域IIIに配置する場合も同様で，領域IIIにおいて領域Cの獲得する需要量を最大にする配置は施設Bの右に隣接して配置することであり，そのときの獲得する需要量は $D-F(b)$ である。②の領域IIに配置する場合は，支配する区間の幅は均一でちょうどAとBで挟まれた区間の半分である。この支配区

間中に入る需要量が最大になる場合は需要の分布によりことなり，獲得する需要量を微分した値により判断しなければならない。そこで

$$\frac{d}{dc}\left\{F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{b+c}{2}\right)-f\left(\frac{a+c}{2}\right)\right\}$$

の値がゼロになる極値を与える c に対する $F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ およびＣが施設Ａの右側に隣接するときの需要量 $F\left(\frac{b+c}{2}\right)-F(a)$ と施設Ｂの左側に隣接するときの需要量 $F(b)-F\left(\frac{a+c}{2}\right)$ がこの区間IIに配置するときの最大需要量を獲得するための候補になるのである。

(2)　$a>b$ の場合

この場合はＣの配置に関してはＡ，Ｂが既に配置されており，その配置順序は全く関係ないので $a<b$ の場合と同様に考えられる。

(3)　$a=b$ の場合

この場合はＡ，Ｂ両施設が配置されている点の右側または左側に配置することにより少なくとも全需要量の半分を施設Ｃは獲得することができる。

次に施設Ｂを最適に配置する問題であるが，これはすでに施設Ａが配置されており，後から施設Ｃが施設ＡおよびＢの位置を考慮に入れて，最適に配置されることを前もって考慮して最適に配置しなければならない。

これは $a<b$ の場合を考えると，Ｃが区間Ｉに配置する場合（図３－１参照）はＢの獲得する需要量にはＣの配置は関係がない（すなわち，Ｂの獲得する需要量は減少しない）のである。これはＢから見たＡの後背地の需要量が多いのであり，このことはＢに取っては必ずしも自分の獲得する需要量が減らないか

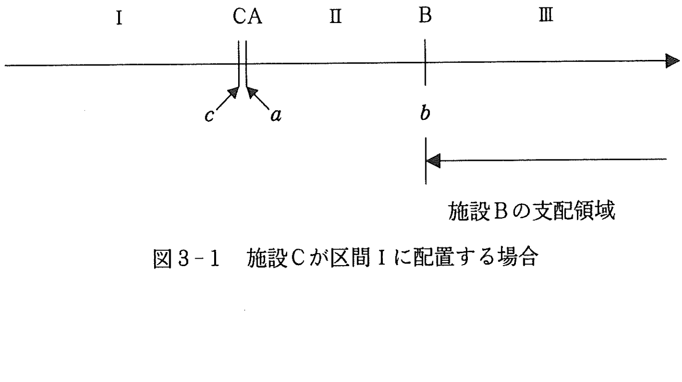

図３-１　施設Ｃが区間Ｉに配置する場合

ら良いというわけではない。

また，Cが区間IIIに配置する（すなわち，Bの右側に隣接して配置する）とき（図3－2参照）は，BはAとCに挟まれることになり，Bの獲得する需要量はAとBの中点からBまでの領域である。

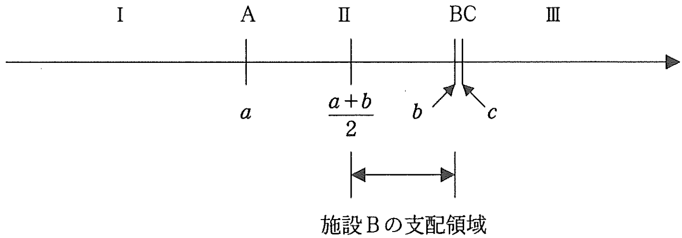

図3-2　区間IIIに配置する場合

また，Cが区間IIに配置する場合はBはA，Cに対する後背地の需要はすべて獲得できるが，このようになるのは後背地の需要量があまり多くない場合である。CがAと同じ場所に配置する場合はBの獲得する需要量は全く減少しないが，これはAの獲得していた需要量がかなり多い場合である。また，CがBと同じ場所に配置するのはBの獲得するかない需要量が多い場合であるが，同じ場所に配置されるので半分になってしまう。このように，Bの最適配置を決めるためにはCの最適配置問題（メディアノイド問題）を解く必要があり非常に難しい問題になる。

一般の分布では非常に難しいので，次のセクションではスペシャルケースとして需要がある区間に一様に分布している場合を考える。

3．需要が一様に分布する場合

ここで，需要がある区間で一様に分布する場合を考える。区間としては［0, 1］を，需要量としては

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

と仮定しても本質的には同じであることは容易にわかる。セクション2と同様にCの配置問題，すなわちメディアノイド問題を考える。セクション2のときと同様に$a<b$の場合は図4で表される3つの区間によって分けられたCの配置問題になる。

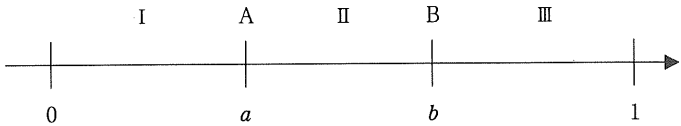

図4　$0 \leq a < b \leq 1$ の場合

施設Cの配置としては，区間Iのときは Aの左側に隣接する場合が一番良いのであるから，施設Cが獲得する需要量はaになる。区間IIIでは，同様にして施設Bの右側に隣接して配置するので施設Cの獲得する需要量は$1-b$になる。また，区間IIにおいては一様であるからどこに配置しても同じで，施設Cが獲得する需要量は$\dfrac{b-a}{2}$である。施設Cが施設Aと同じ位置に配置されればAの支配領域は$\left[0, \dfrac{a+b}{2}\right]$であるので，施設Cは需要量$\dfrac{a+b}{4}$を獲得することができる。さらに施設Bと同じ位置に配置されればAの支配領域は$\left[\dfrac{a+b}{2}, 1\right]$であるので，施設Cは需要量$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a+b}{2}\right)$を獲得することができる。ゆえに，すべての場合を考えてCの獲得する最大需要量は

$$\max\left\{a,\ 1-b,\ \frac{b-a}{2},\ \frac{a+b}{4},\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

となり，このいずれが最大になるかは(a, b)の領域により異なる。

また，$0 \leq b < a \leq 1$のときは$0 \leq a < b \leq 1$のときとは対称でaとbを入れ替えれば良いのである。(図5参照)

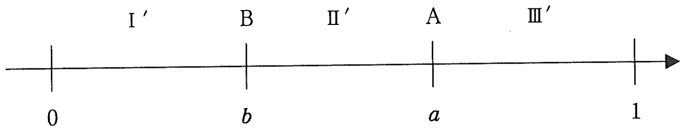

図5　$0 \leq b < a \leq 1$ の場合

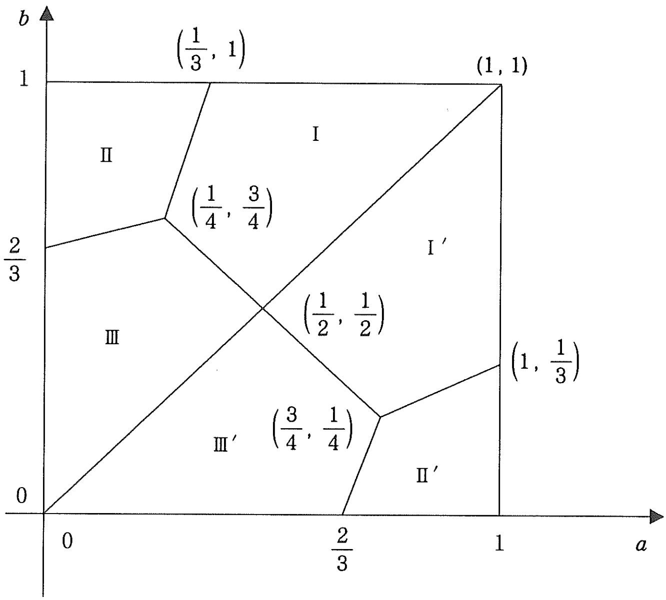

図７　最適解の分布

この両方の場合を考慮するとCの最適解は図７のように分類される。

各領域に対し施設Cが獲得する需要量を次の表１で表す。

次に，施設Bの配置問題を考える。施設Aが既に設置された市場の中に施設

表１　施設Cの最適配置と獲得する需要量

領　域	施設Cの最適位置	施設Cの獲得する需要量
I	$a-\varepsilon$	a
II	II 内の任意の点	$\frac{b-a}{2}$
III	$b+\varepsilon$	$1-b$
I′	$b-\varepsilon$	b
II′	II′ 内の任意の点	$\frac{a-b}{2}$
III′	$a+\varepsilon$	$1-a$

（＊　ここで右に隣接して配置する場合を $+\varepsilon$，左に隣接する場合を $-\varepsilon$ で表した。）

を配置するもので，後から設置される施設Cに奪われる需要量を考慮に入れて最大の需要量が獲得できるように施設を配置する。この問題はセントロイド問題であり，一般には非常に難しいのであるが，このセクションのように需要が一様であり，上のように施設Cの最適方策がはっきりと与えられるなら求めることができる。それゆえ，図7において a の値の変化に伴ったBおよびCの最適配置を考える。

(I) $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ のとき

(i) $0 \leq b < a$ ならCは $a+\varepsilon$ に配置するのでBは $a-\varepsilon$ に配置するのが良い。このときBの獲得する需要量は a である。

(ii) $a < b \leq \frac{a+2}{3}$ のときCは $b+\varepsilon$ に配置するのでBはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=\frac{a+2}{3}$ でBが獲得する需要量は $\frac{1-a}{3}$ である。

(iii) $\frac{a+2}{3} < b \leq 1$ のときCは $[a, b]$ 間の任意の位置に配置するので，Bはできるだけ A の近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=\frac{a+2}{3}+\varepsilon$ に配置する。この場合Bは少なくとも $\frac{1-a}{3}$ の需要量が確保できる。

(II) $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}$ のとき

(i) $0 \leq b < a$ ならCは $a+\varepsilon$ に配置するので，Bは $a-\varepsilon$ に配置するのが良い。このときBの獲得する需要量は a である。

(ii) $a < b \leq 1-a$ のときCは $b+\varepsilon$ に配置するので，BはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=1-a$ でBが獲得する需要量は $\frac{1}{2}-a$ である。

(iii) $1-a < b \leq 3a$ のときCは $a-\varepsilon$ に配置するので，Bはできるだけ A の近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=1-a+\varepsilon$ に配置する。この場合Bは $\frac{1}{2}$ の需要量が確保できる。

(iv) $3a < b \leq 1$ のときCは $[a, b]$ 間の任意の位置に配置するので，Bはできるだけ A の近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=$

$3a+\varepsilon$ に配置する。この場合Bは少なくとも $1-3a$，多くとも $\frac{1}{2}+a$ の需要量が確保できる。

(III) $\frac{1}{3}<a\leq\frac{1}{2}$ のとき

（i） $0\leq b<a$ ならCは $a+\varepsilon$ に配置するので，Bは $a-\varepsilon$ に配置するのが良い。このときBの獲得する需要量は a である。

（ii） $a<b\leq 1-a$ のときCは $b+\varepsilon$ に配置するので，BはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=1-a$ でBが獲得する需要量は $\frac{1}{2}-a$ である。

（iii） $1-a<b\leq 1$ のときCは $a-\varepsilon$ に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=1-a+\varepsilon$ に配置する。この場合Bは $\frac{1}{2}$ の需要量が確保できる。

(IV) $\frac{1}{2}<a\leq\frac{2}{3}$ のとき

（i） $0\leq b<1-a$ ならCは $a+\varepsilon$ に配置するので，Bは $1-a-\varepsilon$ に配置するのが良い。このときBの獲得する需要量は $\frac{1}{2}$ である。

（ii） $1-a\leq b<a$ のときCは $b-\varepsilon$ に配置するので，BはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=1-a$ でBが獲得する需要量は $\frac{1}{2}-a$ である。

（iii） $a<b\leq 1$ のときCは $a-\varepsilon$ に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=a+\varepsilon$ に配置する。この場合Bは $1-a$ の需要量が確保できる。

(V) $\frac{2}{3}<a\leq\frac{3}{4}$ のとき

（i） $0\leq b<3a-2$ のときCは $[b, a]$ 間の任意の位置に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=3a-2-\varepsilon$ に配置する。この場合Bは少なくとも $3a-2$，多くとも $2a-1$ の需要量が確保できる。

（ii） $3a-2\leq b<1-a$ ならCは $a+\varepsilon$ に配置するので，BはAにできるだけ近く $1-a-\varepsilon$ に配置するのが良い。このときBの獲得する需要量は

$\frac{1}{2}$である。

(iii) $1-a \leq b < a$のときCは$b-\varepsilon$に配置するので，BはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=1-a$でBが獲得する需要量は$a-\frac{1}{2}$である。

(iv) $a < b \leq 1$のときCは$a-\varepsilon$に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=a+\varepsilon$に配置する。この場合Bは$1-a$の需要量が確保できる。

(VI) $\frac{3}{4} < a \leq 1$のとき

(i) $0 \leq b < \frac{a}{3}$のときCは$[b, a]$間の任意の位置に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=\frac{a}{3}-\varepsilon$に配置する。この場合Bは少なくとも$\frac{a}{3}$，多くとも$\frac{2a}{3}$の需要量が確保できる。

(ii) $\frac{a}{3} \leq b < a$のときCは$b-\varepsilon$に配置するので，BはAからなるべく離れて配置するのが望ましい。すなわち，$b=\frac{a}{3}$でBが獲得する需要量は$\frac{a}{3}$である。

(iii) $a < b \leq 1$のときCは$a-\varepsilon$に配置するので，BはできるだけAの近くに配置する方が良いことがわかる。それゆえ，$b=a+\varepsilon$に配置する。この場合Bは$1-a$の需要量が確保できる。

以上からBの（シュタッケルベルグ均衡解としての）最適方策は次の表で与えられる。

表2　Bの最適方策と獲得する需要量

Aの施設の位置	Bの施設最適な配置	Bの獲得する需要量(W_B)
$0 \leq a \leq \frac{1}{4}$	$b=\frac{a+2}{3}+\varepsilon$	$\frac{1-a}{3} \leq W_B \leq \frac{2-2a}{3}$
$\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}$	$b=1-a+\varepsilon$	$W_B=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4}$	$b=1-a-\varepsilon$	$W_B=\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4} < a \leq 1$	$b=\frac{a}{3}-\varepsilon$	$\frac{a}{3} \leq W_B \leq \frac{2a}{3}$

4. おわりに

本論文では競合する3施設の配置問題を考えた。ここでは，施設の配置には順序があり，最初の施設の配置が与えられた市場において，2番目の施設と3番目の施設の配置を考えた。2番目の施設配置問題は通常の2施設のセントロイド問題と同じであり，3番目の施設の配置問題であるメディアノイド問題と併せてこれまで考えられた2施設の競合配置問題に関する解析がこの3施設に対しても応用できることを示した。需要が一様に分布している場合は比較的容易に計算でき，そのメディアノイド問題の解が容易に与えられるので，それを用いたセントロイド問題の解を与える方策を導いた。1番目の施設を配置する問題については，2番目と3番目の解を解析しなければならないので非常に難しく今後の課題にしたいと思う。

参考文献

[1] Hotelling, H. (1929) Stability in Competition. *Economic Journal* 39: 41-57.
[2] Hakimi, S. L. (1983) On Locating New Facilities in a Competitive Environment. *European Journal of Operational Research* 12: 29-35.
[3] Drezner, Z. (1982) Competitive Location Strategies for Two Facilities. *Regional Science and Urban Economics* 12: 485-493.
[4] 塩出省吾，(1997) 確率的制約条件の下での競合する2施設の配置問題，神戸学院経済学論集，第29巻第1・2号：27-36.
[5] 塩出省吾，(2000) 不確実下の2段階競合施設配置問題，神戸学院経済学論集，第32巻第1・2号87-96.
[6] Shiode, S.; Drezner, Z. (2003) A Competitive Facility Location Problem with Stochastic Weights. *European Journal of Operational Research* 149: 47-52.
[7] Drezner, T.; Drezner, Z.; Shiode, S. (2002) A Threshold Satisfying Competitive Location Model. *Journal of Regional Science* 42: 287-299.
[8] Osumi, S.; Shiode, S; Teraoka, Y.; Ishii, H. (1998) A Competitive Location Problem with Establishing Cost. *Mathematica Japonica* 48: 19-26.
[9] Karkazis, J. (1989) Facility Location in a Competitive Environment: A Promethee Based Multiple Criteria Analysis. *European Journal of Operational Research* 42: 294-304.

[10] Shiode, S.; Ishii, H. (1995) A (k/Am) Medianoid Problem under Competitive Environment. *Mathematica Japonica* 41. 239-244.