残留農薬削減のための農薬散布量決定問題

伊　藤　　　健

概　要

農業経営において，作物栽培時に散布する農薬は収穫量を増加し，労働力を軽減するため，その生産性において現代では欠くことのできないものである。しかし，無配慮に農薬を利用すれば，収穫される農作物に非常に高い濃度で残留するだけでなく，土壌汚染も伴うことから，以降の経営に悪影響を及ぼす。したがって，残留農薬について考慮した上での利用が必要とされる。本論文では，複数の農薬を用いて単一の作物を栽培する際，収穫後の作物に残留する各農薬量と，各農薬に設定される残留量基準値との比に注目し，その比の最大値を最も小さくするべく農薬散布量決定問題を提案する。本モデルでは，散布される農薬量に応じて栽培に必要な労働時間，収穫量が変化することを制約条件に反映している。また，最適散布量を求める手続きとして，二分探索法を応用した効率的なアルゴリズムを開発した。

1　はじめに

情報産業が今日の経済活動の中心となり，世界経済に与える影響は大きなものとなっているが，人類が生活するうえで欠くことのできない食糧を産み出す第一次産業，すなわち農業の果たす役割も軽視することはできない。広大な土地をもつアメリカ等の先進国にとっては自国の食糧自給についてほとんど心配する必要は無いのかもしれないが，日本，韓国をはじめとした国土の狭いアジア諸国については必ずしも楽観視できるものではない。特に，日本は先進国中で最も食糧自給率が低く，就農者不足も深刻なものとなっている。これらの原

因はいくつか考えられるが，中国等の安価な食糧が日本市場で国内産を圧迫し農家の利益を減少させ，離農者を増やしている。また，工業や情報産業の発達ゆえ，若い世代の就農希望者が少ないことも一因である。

今後，中国の貿易量は一層増加するであろうし，情報産業も更なる発達を遂げるであろうことを考えると，これらの問題は欧米諸国にとっても深刻なものとなってくるかもしれない。いずれにせよ，効率的に農作物を生産することは国家にとっても，農業経営にとっても非常に重要なことに変わりは無い。これまで，農業経営の効率化を目指した数理的な研究はいくつか行われてきた［3，4］。確かにそれらは経営者の利益を追求するのに妥当なモデルではある。しかし，経営者の利益のみを追求することは，今後の農業経営において必ずしも十分なものではない。

農薬は現代農業に欠くことのできないものであるが，環境保護の観点から土壌への残留農薬問題が指摘されたり，消費者が残留農薬の少ない生産物（付加価値商品）を求める傾向を考慮すると，出来る限りその使用量を減らすことが経営を成功させる重要な要素となる。勿論，全く使わなければ収穫量は落ち，利益が見込めないため，ある一定の利益（収穫量）は確保したうえで農薬の使用量を極力少なくする必要がある。また，日本における残留農薬の規制として，農作物毎に各農薬成分の残留量が残留農薬基準として制限されているが，これらは農薬散布量を決定する際の重要な基準となる。

本研究では，ある耕作地において一種類の農作物を栽培する際，経営面，環境面において最も効果的な各農薬の散布量を決定する数理モデルを提案する。本モデルでは，各農薬に設定された残留量規制値と，予想される農薬残留量の比率を最適化の基準とし，対象とする農薬中でその比率が最も大きいものを目的関数として，その最小化を試みている。作付計画問題等とは異なり，決定変数は各農薬の散布量であり，制約条件についても農薬散布量を基にした労働制約や収穫制約を新たに導入している。

2 定 式 化

本論文では，ある作物栽培期において，単一作物を栽培する耕作地への農薬散布量について議論するが，前節で述べた通り，これからの農業経営において，利益のみを直接追求することは必ずしも最良の経営方針とは言えないため，経営を維持するための最小限の利益を確保したうえで，作物への残留農薬をでき得る限り軽減する最適化を試みる。以降，次のような記号を用いる。

x_i：農薬（有効成分）$i(i=1, 2, \cdots, n)$ の散布量（溶質量）

a_i：対象作物に対する農薬 i の残留量基準値

$\overline{W}$：当該栽培期に確保できる労働時間

$\overline{H}$：当該栽培期に最低限確保したい対象作物収穫量（利益）

ただし，各農薬は耕作地全体に均一に散布されるものとし，特に断りの無い限り，すべての議論は対象耕作地の単位面積について行う。ここで，a_i は我国における残留農薬基準と考えることができるが，これは収穫された作物に対する重量百分率で表現される。

使用される農薬が収穫作物に残留量基準値 a_i を超えて残留すれば，その作物は不適格なものとされ，商品として出荷することができなくなる。しかし，この基準値を超えていなくとも，作物がその基準値に近い量の残留農薬を含んでいた場合，商品としての付加価値は減少するため，残留量基準値に対する残留農薬量の比を最適化基準として導入する。つまり，各農薬の散布量 x_i に対して予想される作物への各農薬残留率を関数 $R_i(x_i)$ とすれば，次のようなものである。

$$\frac{R_i(x_i)}{a_i}(i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

ただし，関数 $R_i(x_i)$ は狭義増加関数であり，$R_i(0)=0$，$R_i:[0, \infty)\to[0, 1)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とする。

各農薬について，(1)の値はより低い方が好ましく，すべての残留農薬を同

等レベルに削減するため，言い換えれば，残留値が突出して高い農薬を無くすため，次のような目的関数を設定し，その最小化を行う。

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \frac{R_i(x_i)}{a_i} \tag{2}$$

農薬利用の有無に関わらず，作物を栽培するには作付等における基本的な作業が必要であり，それらに要する作業時間を W とする。作物の栽培過程には，雑草，害虫駆除等の作付後の作業が必要とされ，更なる作業時間が W に加算されるが，農薬を利用することにより，その散布量 x_i に応じて各々の作業を軽減することができる。したがって，当該栽培期の各作業に必要な作業時間は x_i の狭義減少関数 $w_i(x_i)$ と表すことができ，労働時間に関して次のような制約条件が必要となる。

$$W+\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i) \leq \overline{W} \quad \text{(労働制約)} \tag{3}$$

ただし，$w_i : [0, \infty) \to (0, \infty)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ とする。

農薬の利用は栽培過程における作業時間を軽減するだけではなく，養分の吸収を促進したり，作物の収穫効率を高めることができ，各農薬の効果による収穫量増は x_i の狭義増加関数 $h_i(x_i)$ と表すことができる。勿論，農薬を利用することなく，最低限必要な作業を行うことで一定の収穫量は確保でき，その値を H とすれば，当該栽培期に最低 $\overline{H}$ の収穫量を確保するには次のような制約条件が必要となる。

$$H+\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \geq \overline{H} \quad \text{(収穫制約)} \tag{4}$$

ただし，$h_i(0)=0\ (i=1, 2, \cdots, n)$ とする。なお，$h_i(x_i)$ は $x_i \to \infty$ について極限値をもち，H は $W+\sum_{i=1}^{n} w_i(0)$ の作業時間を費やすことによって得られる収穫量と考えることが妥当と思われる。

以上の議論から，単一作物栽培における残留農薬削減のための農薬散布量決定問題を次のように定式化する。

$$\text{問題1：目的関数}\quad \max_{i=1,2,\cdots,n} \frac{R_i(x_i)}{a_i} \rightarrow \ \text{最小化}$$

$$\text{制約条件}\quad W+\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i) \leq \overline{W} \quad (\text{労働制約})$$

$$H+\sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \geq \overline{H} \quad (\text{収穫制約})$$

$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

3　解法と妥当性

問題1の実行可能解 $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ について，次のような性質が得られる。

定理1

$$\frac{R_1(x_1^*)}{a_1}=\frac{R_2(x_2^*)}{a_2}=\cdots=\frac{R_n(x_n^*)}{a_n} \tag{5}$$

が成立し，$\mathbf{x}^*$ において労働制約，収穫制約の少なくとも一方が活性であれば，$\mathbf{x}^*$ は問題1の最適解である。

<u>証明</u>

$f^*=R_i(x_i^*)/a_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ とする。$\mathbf{x}^*$ が最適解でないと仮定すると，目的関数の値を f^* より小さくする実行可能解 $\hat{\mathbf{x}}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ が存在し（$\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}^*$），

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \frac{R_i(\hat{x}_i)}{a_i} < f^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_i(\hat{x}_1)}{a_i} < \frac{R_1(x_1^*)}{a_1} \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_i < x_i^* \ (i=1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

となる。$\mathbf{x}^*$ において労働制約，収穫制約の少なくとも一方が活性であるので，(6)が満足される場合，関数 $w_i(x_i)$ の単調減少性，あるいは関数 $h_i(x_i)$ の単調増加性により，$\hat{\mathbf{x}}$ はその制約条件を満足しない。こ

れは $\hat{\mathbf{x}}$ の実行可能性に矛盾する。

□

定理 1 は**問題 1** の最適解に関する十分条件を示しているので，この条件を満たす解を求めるべく，最適解探索アルゴリズムを構築すればよい。このとき，最適値 f^* に関する次の性質が有用なものとなる。

定理 2

$$f=\frac{R_1(x_1)}{a_1}=\frac{R_2(x_2)}{a_2}=\cdots=\frac{R_n(x_n)}{a_n} \tag{7}$$

を満足する $\mathbf{x}=(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ について

$\mathbf{x}$ は実行可能解である $\Leftrightarrow$ $f^* \leq f$

である。

<u>証明</u>

$\mathbf{x}$ が実行可能解のとき，労働制約，収穫制約の少なくとも一方が活性となれば，**定理 1** より $f^*=f$ は明らかである。両制約条件とも活性でなければ，微小量 $\varepsilon>0$ によって表現される実行可能解

$$(x_1-\varepsilon, x_2-\varepsilon, \cdots, x_n-\varepsilon)$$

が存在し，関数 $R_i(x_i)$ の単調増加性より，

$$\frac{R_i(x_i-\varepsilon)}{a_i}<\frac{R_i(x_i)}{a_i}=f\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

となる。これは，目的関数の値を f より小さくする実行可能解が少なくとも一つ存在することを示している。したがって，$f^*<f$ である。

逆に，$f^* \leq f$ のとき，$\mathbf{x}$ の各成分値が最適解の各成分値以上となるのは明らかである。このとき，最適解が実行可能であることを考慮すれば，関数 $w_i(x_i)$ の単調減少性，関数 $h_i(x_i)$ の単調増加性により，$\mathbf{x}$ は実行可能であると言える。

□

上の 2 つの定理より，二分探索法を応用した**問題 1** の最適解探索アルゴリズ

ムを以下に提案する。なお，最適値が1以上となる解は実用的でないため，本アルゴリズムにおいては，最初にそのような解を排除する手続きをとる。

最適農薬散布量決定アルゴリズム

Step 0

$$1=\frac{R_1(x_1)}{a_1}=\frac{R_2(x_2)}{a_2}=\cdots=\frac{R_n(x_n)}{a_n}$$

となる $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が実行可能解であれば **Step 1** へ，そうでなければ「実用的な最適解が存在しない」として終了。

Step 1　$f_u=1, f_l=0$ とする。

Step 2　$f=(f_u+f_l)/2$ を計算し，

$$f=\frac{R_1(x_1)}{a_1}=\frac{R_2(x_2)}{a_2}=\cdots=\frac{R_n(x_n)}{a_n}$$

となる $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を求める。

Step 3　$\mathbf{x}$ が実行可能解でないなら，$f_l=f$ として **Step 2** へ。$\mathbf{x}$ が実行可能解，かつ労働制約，収穫制約の少なくとも一方が活性であれば，$\mathbf{x}$ を最適解，f を最適値として終了。いずれの制約も活性でなければ，$f_u=f$ として **Step 2** へ。

4　数　値　例

前節で提案した最適農薬散布量決定アルゴリズムを用いて，ある例題の最適解を求める。

作物 A を栽培するにあたり，農薬1，2，3を各々 x_1, x_2, x_3 (g)散布するものとし，以下のような問題を考える。

例題：目的関数　$\max_{i=1,2,\cdots,n} \dfrac{R_i(x_i)}{a_i} \rightarrow$　最小化

制約条件　$300+\sum_{i=1}^{3} w_i(x_i) \leq 700$　(時間)

残留農薬削減のための農薬散布量決定問題

$$500+\sum_{i=1}^{3} h_i(x_i) \geq 1300 \quad \text{(kg)}$$

$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, 3)$$

ただし，

$$(a_1, a_2, a_3)=(5, 3, 10) \ \text{(ppm)}$$

$$R_i(x_i) \frac{2}{1+\exp\left(-\dfrac{x_i}{a_i}\right)}-1, \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(900000, 1400000, 720000)$$

$$w_i(x_i)=\frac{\beta_i}{x_i+1} \ \text{(時間)}, \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(800, 200, 500)$$

$$h_i(x_i)\gamma_i-\frac{\gamma_i}{\exp(x_i)} \ \text{(kg)}, \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)=(300, 100, 600)$$

とする。

まず，**Step 0** を実行すると，

$$(x_1, x_2, x_3)=(9.000, 8.400, 14.400)$$

が得られ，この解は実行可能解なので **Step 1** を実行する。その後，**Step 2, Step 3** が繰り返されるが，表 1 のように状態が遷移する。

表 1：手続き繰り返し時の状態遷移

繰り返し回数	f_u	f_l	f	x_1	x_2	x_3	実行可能性
1	1.000	0.000	0.500	4.500	4.200	7.200	実行可能
2	0.500	0.000	0.250	2.250	2.100	3.600	実行不可能
3	0.500	0.250	0.375	3.375	3.150	5.400	実行可能
4	0.375	0.250	0.312	2.812	2.625	4.500	実行可能
5	0.312	0.250	0.281	2.531	2.362	4.050	実行可能
6	0.281	0.250	0.266	2.391	2.231	3.825	実行不可能
7	0.281	0.266	0.273	2.461	2.297	3.938	実行可能
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

最終的に，

$$(f, x_1, x_2, x_3)=(0.267, 2.403, 2.243, 3.844)$$

のとき労働制約が活性となり，これらを最適値，最適解として手続きを終了する。

5 おわりに

本論文では，一種類の農作物を栽培する際の農薬散布量決定モデルを提案した。本モデルの特徴は，各農薬に設定された残留量基準と，予想される農薬残留量との比率を目的関数とし，利用する農薬間での最大値を最小化している点，労働制約と収穫制約を導入することにより，栽培に必要な労働時間と収穫量が農薬散布量に応じて変化することを考慮した点である。また，最適解に関する十分条件を導き，最適散布量を求めるアルゴリズムの根拠とし，二分探索法によりその効率化を図った。

本モデルでは，一種類の農薬が一つの作業項目に作用するという前提で労働制約を設定しているが，一種類の農薬が複数の作業項目に効果を発揮することも考えられ，また実際には農薬の散布時期や回数，農薬同士の反応による影響など，最適化の環境を複雑にする要因は多々存在し，より現実的，実用的なモデルを構築するためには吟味が必要である。

栽培期に確保できる労働力や，確保したい収穫量はある程度柔軟に対応でき，また農薬が作業時間をどの程度軽減し，どれだけ収穫量増加に効果を発揮するかという情報は確定的に得られないことが多いため，労働制約，収穫制約にファジィ要素を導入することが今後の拡張として価値あるものと考えられる。さらに，対象作物の複数化に対応し，作付計画問題との融合も今後の研究課題である。

参考文献

[1] Avriel M, Golany B, *Mathematical Programming for Industrial Engineers*, Marcel Dekker, Inc. (1996).

[2] Dantzig GB, “Linear Programming under Uncertainty”, *Management Science*, **1**, 197-206 (1955).

[3] Hayashi K, "Multicriteria analysis for agricultural resource management: A critical survey and future perspectives", *European Journal of Operational Research*, **122**, 486-500 (2000).

[4] 南石晃明,「確率計画法」, 現代数学社 (1995).